Quelques propriétés importantes en Calcul Intégral

Qu'est-ce qu'une primitive?

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que la fonction F est une primitive de f sur I pour signifier que :

$$\forall x \in I, F'(x) = f(x)$$

Quelles sont les fonctions qui admettent des primitives ?

De nombreuses fonctions admettent des primitives, mais en pratique nous nous limiterons aux fonctions continues.

Toute fonction continue sur un intervalle I admet au moins une primitive sur cet intervalle. Ce qui ne signifie pas que l'on sait écrire cette primitive à l'aide de fonctions usuelles.

Par exemple la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$, mais nous ne savons pas les écrire à l'aide des fonctions classiques.

Quand une fonction est prolongeable par continuité en un point d'un intervalle I, on pourra lui appliquer les résultats sur les fonctions continues.

Une fonction admet-elle plusieurs primitives ?

Une fonction continue sur un intervalle admet une infinité de primitives sur cet intervalle. Deux primitives quelconques d'une même fonction continue diffèrent d'une constante.

Y a-t'il des primitives particulières ?

Parmi toutes les primitives d'une fonction f continue sur un intervalle I, il en existe une qui s'annule en un réel a de l'intervalle I.

En effet si F est une primitive quelconque de f, la fonction G définie sur I par

$$\forall x \in I, G(x) = F(x) - F(a)$$

est une primitive de f. De plus on a $G(a) = 0$.

Il n'en existe pas d'autres.

En effet si H est aussi une primitive de f qui s'annule en a, on sait qu'il existe un nombre réel k tel que :

$$\forall x \in I, H(x) - G(x) = k$$

Cette égalité est vérifiée pour tout x et donc en particulier pour $x = a$. Donc

$$H(a) - G(a) = k$$

Donc

$$0 - 0 = k$$

Donc

$$k = 0$$

Et donc

$$\forall x \in I, G(x) = H(x).$$

Si f est une fonction continue sur un intervalle I, et si a est un nombre réel de l'intervalle I, la primitive de f qui s'annule en a est la fonction F notée :

$$\forall x \in I, F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Cette notation est donc équivalente aux deux relations :

$$F'(x) = f(x)$$
$$F(a) = 0$$

<u>Remarque :</u>
La fonction F est de classe C^1.

Qu'appelle t'on une intégrale définie ?

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a, b deux réels dans I.
On appelle intégrale de a à b de la fonction f le nombre réel noté :

$$\int_a^b f(x)dx$$

Ce nombre est égal à $F(b) - F(a)$, où F est une primitive quelconque de la fonction f sur I.
Ce nombre ne dépend pas de la primitive choisie.
L'adjectif « définie » s'oppose à deux autres adjectifs : indéfinie et impropre.
L'intégrale indéfinie correspond en gros à une primitive. On écrit par exemple :

$$\int f(x)dx \quad \text{sans mentionner les bornes}$$

Cette écriture correspond à la primitive « générique » : celle que l'on obtient par intégration sans faire apparaître de constante :

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$$

L'autre type d'intégrale que l'on voit en deuxième année est « l'intégrale impropre » ou encore « intégrale généralisée » :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} dx$$

Peut-on connaître le signe d'une intégrale ?

Soit f une fonction continue positive sur un intervalle I et a, b deux réels de I, tels que

$$a \leq b$$

Alors

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

Quand deux fonctions sont rangées dans un ordre donnée, qu'en est-il de leurs intégrales ?

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, tels que $\forall x \in I, f(x) \leq g(x)$.
Soient a et b deux valeurs de l'intervalle I, telles que

$$a \leq b$$

Alors

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

Qu'appelle t'on « le théorème de la moyenne »

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. Cet intervalle étant un intervalle fermé, elle est bornée par deux réels m et M tels que :

$$\forall x \in [a,b], m \leq f(x) \leq M$$

Alors si $a \leq b$, on a

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

Comment s'utilisent les valeurs absolues avec les intégrales ?

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soit $a \in I, b \in I$, tels que $a \leq b$, alors

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

Qu'appelle t'on la « linéarité de l'intégrale » ?

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I.
Soit λ et μ deux nombres réels. Alors $\forall a \in I, \forall b \in I$

$$\int_a^b \big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big)dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)dx$$

Le mot « linéarité » sera explicité plus tard dans l'année quand nous parlerons d'espaces vectoriels et d'applications linéaires.

Qu'est-ce que « la relation de Chasles » ?

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
Soient a, b, c, trois nombres réels de l'intervalle I. On a

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

On généralise cette relation par récurrence :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)dx = \int_{a_1}^{a_n} f(x)dx$$

Principe de l'intégration par parties

Soit u une fonction de classe C^1 sur un intervalle $[a,b]$ et v' une fonction continue sur ce même intervalle admettant une fonction v pour primitive. On appelle u' la dérivée de u. On a :

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$