Lois discrètes usuelles

1) La loi uniforme

1.1) Situation standard

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n, indiscernables au toucher. On extrait une boule de l'urne. On appelle X la variable aléatoire correspondant au numéro de la boule tirée.
X suit une loi uniforme de paramètre n : on écrit

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}_{[\![1,n]\!]}$$

1.2 Les cas classiques

Jet d'un dé cubique bien équilibré : on s'intéresse au numéro de la face sortie.

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}_{[\![1,6]\!]}$$

1.3 Univers image

On a clairement

$$X(\Omega) = [\![1,n]\!]$$

1.4 Loi de probabilité

On a

$$\forall k \in [\![1,n]\!], P(X = k) = \frac{1}{n}$$

1.5 Espérance et variance

On a

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \qquad V(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

Démonstrations :
On a

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^{n} kP(X = k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} k \times \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k \\ &= \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n+1}{2} \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}E(X^2) &= \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} k^2 P(X=k)\\ &= \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} k^2 \times \frac{1}{n}\\ &= \frac{1}{n}\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} k^2\\ &= \frac{1}{n}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\ &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6}\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}V(X) &= E(X^2) - E(X)^2\\ &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2\\ &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{1}{4}(n+1)^2\\ &= \frac{n+1}{2}\left(\frac{2n+1}{3} - \frac{n+1}{2}\right)\\ &= \frac{n+1}{2}\left(\frac{n-1}{6}\right) = \frac{n^2-1}{12}\end{aligned}$$

2) La loi de Bernoulli

2.1 Situation standard

Une urne contient une proportion p de boules blanches et une proportion $q = 1 - p$ de boules noires (toutes insidscernables au toucher)
On tire au hasard une boule de l'urne.
On définit la variable aléatoire X par

$X = 0$si la boule tirée est noire
$X = 1$si la boule tirée est blanche

Tirer une boule blanche sera appelé **succès** et tirer une boule noire **échec.**
On dit que X suit une loi de Bernoulli de paramètre p et l'on note :

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$$

On écrit aussi

$$X \hookrightarrow B(1,p)$$

2.2 Les cas classiques

Le cas le plus classique est le jeu de pile ou face avec une pièce bien équilibrée ou pas. On associe 1 à "pile" par exemple et "0" à face. Cela permet en particulier de compter le nombre de piles (ou de faces) obtenus sur un certain nombre de lancers.

2.3 Univers image

On a

$$X(\Omega) = \{0,1\}$$

2.4 Loi de probabilité

On a

$$P(X = 0) = q = 1 - p$$
$$P(X = 1) = p$$

2.5 Espérance et variance

On a

$$E(X) = p \qquad V(X) = p(1-p) = pq$$

Démonstrations

On a

$$E(X) = 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) = 1 \times p = p$$
$$E(X^2) = 0^2 \times P(X = 0) + 1^2 \times P(X = 1) = 1 \times p = p$$
$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq$$

3) La loi binomiale

3.1 Situation standard

Une urne contient des boules blanches et des boules noires en proportion respectives p et $1 - p = q$ (toutes insidscernables au toucher)

On tire une boule de l'urne, on note sa couleur et on la remet dans l'urne. On répète ce protocole n fois, n étant un nombre entier supérieur ou égal à1, fixé à l'avance.

On appelle X la variable aléatoire correspondant au nombres de boules blanche obtenues (nombre de "succès").

Il s’agit de la répétitionun certain nombre de fois fixé à l’avance, dans les mêmes conditions, d’une expérience de Bernoulli, la variable mesurant le nombre de succès obtenu.

On dit que X suit une loi binomiale de paramètres n et p et l'on note

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$$

3.2 Univers image

On a

$$X(\Omega) = [\![0,n]\!]$$

3.3 Loi de probabilité

On a

$$\forall k \in [\![0,n]\!], P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

3.4 Espérance et variance

On a vu que

$$E(X) = np \qquad V(X) = np(1-p) = npq$$

4) La loi hypergéométrique

4.1 La situation standard

Une urne contient N boules : a boules rouges et b boules bleues. On extrait simultanément r boules de cette urne ($r \leq N$).
Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de boules rouges présentes dans l'échantillon.
On dit que X suit une loi hypergéométrique de paramètres *a,b,r*. On écrit

$$X \hookrightarrow \mathcal{H}(a, b, r)$$

4.2 Les cas classiques

Il n'y a pas de cas vraiment classique. En général, les cas abordés sont conformes à la situation standard.
Dans certains cas, on donne N et p la proportion de boules rouges dans l'urne.
Ce qui permet de déterminer a par $p = \frac{a}{N}$ et donc $a = pN$, puis b par $b = N - a$.

4.3 Univers image

L'univers image d'une variable aléatoire qui suit une loi géométrique de paramètres *a,b,r* n'est pas immédiat.
En effet sur les r boules de l'échantillon, on peut penser trouver entre 0 et r boules rouges. Mais si $a < r$, on ne pourra pas avoir r boules rouges. Le plus grand nombre de boules rouges que pourra contenir l'échantillon est donc soit r si $a \geq r$, soit a si $a < r$. Autrement dit il s'agit du plus petit des nombres r ou a. On le note $\min(r, a)$.
De la même façon, le nombre minimum de boules rouges semble être a priori 0, sauf si l'on est obligé d'avoir des boules rouges dans l'échantillon, c'est-à-dire si le nombre de boules bleues n'est pas suffisant donc si $b < r$. Dans ce cas il ne pourrait pas y avoir des échantillons composés uniquement de boules bleues, il y aurait toujours des boules rouges. Mais combien au minimum ? Si $b < r$, il y aura au maximum b boules bleues et donc au minimum $r - b$ boules rouges.
Si $b \geq r$, c'est-à-dire si $r - b$ est un nombre négatif (ou nul), il peut y avoir des échantillons sans boule rouge. Le plus petit nombre de boules rouges que contiendra l'échantillon est donc 0 si le nombre de boules bleues est suffisant, c'est-à-dire si $b \geq r$, ou bien $r - b$ si $b < r$.
Il s'agit toujours du plus grand des nombres 0 ou $r - b$. On le note $\max(0, r - b)$.
En définitive, on a :
QQQnormaltgrouge

$$X(\Omega) = [\![\max(0, r - b); \min(a, r)]\!]$$

4.4 Loi de probabilité

On a

$$\forall k \in \mathrm{X}(\Omega), P(X = k) = \frac{\binom{a}{k}\binom{b}{r-k}}{\binom{a+b}{r}}$$

Démonstration
De combien de façons peut-on extraire simultanément r boules d'une urne qui en contient $a + b$? On peut le faire de $\binom{a+b}{r}$, c'est le nombre de cas possibles.
Parmi ces $\binom{a+b}{r}$, combien contiennent exactement k boules rouges et $r - k$ boules bleues ?
Pour construire de tels échantillons, on place les a boules rouges dans une urne et les b boules bleues

dans une autre urne. On procède alors à une opération à deux étapes successives : on extrait simultanément k boules de la première urne. On peut le faire de $\binom{a}{k}$ façons.

Puis on extrait simultanément $r-k$ boules de la seconde urne. On peut le faire de $\binom{b}{r-k}$ façons.

D'après la règle du produit, on peut donc construire $\binom{a}{k} \times \binom{b}{r-k}$ échantillons différents de r boules contenant exactement k boules rouges et $r-k$ boules bleues.

On a donc

$$P(X=k)=\frac{\binom{a}{k}\binom{b}{r-k}}{\binom{a+b}{r}}$$

Vérifions que la somme des probabilités est bien égale à 1.

On doit donc avoir

$$\sum_{k=\max(0,r-b)}^{k=\min(a,r)} \frac{\binom{a}{k}\binom{b}{r-k}}{\binom{a+b}{r}}=1$$

Pour faciliter l'écriture, on utilise une convention usuelle qui consiste à poser pour n entier strictement positif

$$\binom{n}{p}=0 \text{ si } p>n \text{ ou si } p<0$$

Avec cette convention, on peut écrire

$$\sum_{k=\max(0,r-b)}^{k=\min(a,r)} \frac{\binom{a}{k}\binom{b}{r-k}}{\binom{a+b}{r}}=\sum_{k=0}^{r} \frac{\binom{a}{k}\binom{b}{r-k}}{\binom{a+b}{r}}$$

Il s'agit alorsde démontrer que

$$\forall a \in \mathbb{N}^*, \forall b \in \mathbb{N}^*, \forall r \leq a+b, r \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{r} \frac{\binom{a}{k}\binom{b}{r-k}}{\binom{a+b}{r}}=1$$

On a

$$\sum_{k=0}^{r} \frac{\binom{a}{k}\binom{b}{r-k}}{\binom{a+b}{r}}=\frac{1}{\binom{a+b}{r}}\sum_{k=0}^{r}\binom{a}{k}\binom{b}{r-k}$$

Il s’agit donc de démontrer que

$$\sum_{k=0}^{r}\binom{a}{k}\binom{b}{r-k}=\binom{a+b}{r}$$

C'est une formule classique :.
On fait une démonstration par récurrence sur r

Soit $(\mathrm{P_r})$: $\sum_{k=0}^{r}\binom{a}{k}\binom{b}{r-k}=\binom{a+b}{r}$

(P_0) est vraie. En effet

$$\sum_{k=0}^{0}\binom{a}{k}\binom{b}{r-k}=\binom{a}{0}\binom{b}{0}=1$$

$$\binom{a+b}{0}=1$$

Donc

$$\sum_{k=0}^{0}\binom{a}{k}\binom{b}{r-k}=\binom{a+b}{0}$$

$\forall r\geq 0$, montrons que (P_r) vraie implique (P_{r+1}) vraie.
On a d'après la formule de Pascal

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{r+1}\binom{a}{k}\binom{b}{r+1-k} &= \sum_{k=0}^{r+1}\binom{a}{k}\binom{b}{r-k}+\sum_{k=0}^{r+1}\binom{a}{k}\binom{b-1}{r-k}\\
&= \sum_{k=0}^{r}\binom{a}{k}\binom{b}{r-k}+\binom{a}{r+1}\underbrace{\binom{b}{-1}}_{=0}+\sum_{k=0}^{r}\binom{a}{k}\binom{b-1}{r-k}+\binom{a}{r+1}\underbrace{\binom{b-1}{-1}}_{=0}\\
&= \sum_{k=0}^{r}\binom{a}{k}\binom{b}{r-k}+\sum_{k=0}^{r}\binom{a}{k}\binom{b-1}{r-k}\\
&= \binom{a+b}{r}+\binom{a+b-1}{r}\\
&= \binom{a+b}{r+1}
\end{aligned}$$

Il y a donc hérédité.
On a bien

$$\sum_{k=0}^{r}\binom{a}{k}\binom{b}{r-k}=\binom{a+b}{r}$$

et donc

$$\sum_{k=0}^{r}\frac{\binom{a}{k}\binom{b}{r-k}}{\binom{a+b}{r}}=1$$

4.5 Espérance et variance

On a

$$E(X)=\frac{ar}{a+b}=\frac{ar}{N}\qquad V(X)=\frac{abr}{(a+b-1)(a+b)}\left(1-\frac{r}{a+b}\right)=\frac{N-a}{N-1}\frac{ar}{N}\left(1-\frac{r}{N}\right)$$

On a avec les conventions précédentes

$$E(X)=\sum_{k=0}^{r} kP(X=k) \ = \sum_{k=0}^{r} k\frac{\binom{a}{k}\binom{b}{r-k}}{\binom{a+b}{r}}=\frac{1}{\binom{a+b}{r}}\sum_{k=0}^{r} k\binom{a}{k}\binom{b}{r-k}$$

On passe au factorielles

$$E(X)=\frac{1}{\binom{a+b}{r}}\sum_{k=0}^{r} k\frac{a!}{k!\,(a-k)!}\binom{b}{r-k}=\frac{1}{\binom{a+b}{r}}\sum_{k=1}^{r} k\frac{a!}{k!\,(a-k)!}\binom{b}{r-k}$$

On peut alors simplifier

$$E(X)=\frac{1}{\binom{a+b}{r}}\sum_{k=1}^{r}\frac{a!}{(k-1)!\,(a-k)!}\binom{b}{r-k}=\frac{a}{\binom{a+b}{r}}\sum_{k=1}^{r}\frac{(a-1)!}{(k-1)!\,\big((a-1)-(k-1)\big)!}\binom{b}{r-k}$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned}E(X)&=\frac{a}{\binom{a+b}{r}}\sum_{k=1}^{r}\binom{a-1}{k-1}\binom{b}{r-k}\\&=\frac{a}{\binom{a+b}{r}}\sum_{\boldsymbol{k-1}=0}^{\boldsymbol{k-1}=r-1}\binom{a-1}{\boldsymbol{k-1}}\binom{b}{r-(\boldsymbol{k-1}+1)}\\&=\frac{a}{\binom{a+b}{r}}\sum_{k=0}^{r-1}\binom{a-1}{k}\binom{b}{r-1-k}\end{aligned}$$

D'après ce que l'on a vu dans la partie précédente

$$\sum_{k=0}^{r-1}\binom{a-1}{k}\binom{b}{r-1-k}=\binom{a+b-1}{r-1}$$

On en tire

$$E(X)=\frac{a\binom{a+b-1}{r-1}}{\binom{a+b}{r}}=\frac{a\frac{(a+b-1)!}{(r-1)!\,(a+b-r)!}}{\frac{(a+b)!}{r!\,(a+b-r)!}}=\frac{ar}{a+b}$$

Soit en posant $N=a+b$

$$E(X)=\frac{ar}{N}$$

Pour le calcul de la variance, on commence par calculer $E(X(X-1))$.
On a en reprenant le même modèle que dans la démonstration précédente

$$E(X(X-1)) = \frac{1}{\binom{a+b}{r}} \sum_{k=0}^{r} k(k-1) \frac{a!}{k!\,(a-k)!} \binom{b}{r-k} = \frac{1}{\binom{a+b}{r}} \sum_{k=2}^{r} k(k-1) \frac{a!}{k!\,(a-k)!} \binom{b}{r-k}$$

On simplifie

$$E\big(X(X-1)\big) = \frac{1}{\binom{a+b}{r}} \sum_{k=2}^{r} \frac{a!}{(k-2)!\,(a-k)!} \binom{b}{r-k}$$

$$= \frac{a(a-1)}{\binom{a+b}{r}} \sum_{k=2}^{r} \frac{(a-2)!}{(k-2)!\,\big((a-2)-(k-2)\big)!} \binom{b}{r-k}$$

On a donc

$$E\big(X(X-1)\big) = \frac{a(a-1)}{\binom{a+b}{r}} \sum_{k=2}^{r} \binom{a-2}{k-2} \binom{b}{r-k} = \frac{a(a-1)}{\binom{a+b}{r}} \sum_{k=0}^{r-2} \binom{a-2}{k} \binom{b}{r-2-k}$$

Ce qui donne

$$E(X(X-1)) = \frac{a(a-1)}{\binom{a+b}{r}} \binom{a+b-2}{r-2} = \frac{a(a-1)}{\frac{(a+b)!}{r!\,(a+b-r)!}} \frac{(a+b-2)!}{(r-2)!\,(a+b-r)!} = \frac{a(a-1)(r-1)r}{(a+b-1)(a+b)}$$

On a

$$E(X(X-1)) = E(X^2 - X) = E(X^2) - E(X)$$

Donc

$$E(X^2) = \frac{a(a-1)(r-1)r}{(a+b-1)(a+b)} + \frac{ar}{a+b} = ar \frac{ar-r+b}{(a+b-1)(a+b)}$$

Et

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = ar \frac{ar-r+b}{(a+b-1)(a+b)} - \left(\frac{ar}{a+b}\right)^2 = arb \frac{a+b-r}{(a+b-1)(a+b)^2}$$

Ce que l'on peut écrire

$$V(X) = \frac{abr}{(a+b-1)(a+b)} \left(\frac{a+b-r}{a+b}\right) = \frac{abr}{(a+b-1)(a+b)} \left(1 - \frac{r}{a+b}\right)$$

Soit en posant $N = a+b$

$$V(X) = \frac{a(N-a)r}{(N-1)N} \left(1 - \frac{r}{N}\right) = \frac{N-a}{N-1} \frac{ar}{N} \left(1 - \frac{r}{N}\right)$$

5) La loi géométrique

5.1 Situation standard

Une urne contient des boules rouges et des boules bleues. Il y a une proportion p de boules rouges et une proportion $q = 1 - p$ de boules bleues. On tire une boule de cette urne, si l'on obtient une boule rouge on s'arrête, sinon on la remet et l'on recommence le tirage. La variable X indique le nombre de tirages nécessaires pour obtenir une boule rouge.
Il s'agit d'une suite d'épreuves de Bernoulli de même loi, indépendantes.
On répète donc une même expérience de Bernoulli dans les mêmes conditions jusqu'à obtention d'un succès et l'on s'intéresse au nombre de répétitions qu'il a fallu faire.
On dit que X suit **la loi géométrique de paramètre** p. On écrit

$$X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$$

5.2 Les cas classiques

On lance une pièce bien équilibrée jusqu'à obtenir un "pile". X est le nombre de lancers nécessaires.

$$X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$$

5.3 Univers image

On peut obtenir la boule rouge dès le premier lancer, mais rien n'empêche d'imaginer que l'on obtiendra une telle boule au bout d'un nombre de lancers aussi grands que l'on veut. On a donc

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^*$$

5.4 Loi de probabilité

On peut décrire l'évènement comme une succession (c'est-à-dire une intersection) d'évènements indépendants :

$$(X = k) = B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_{k-1} \cap R_k$$

où B_i désigne l'évènement : "la i-ème boule extraite est bleue" et R_i l'évènement : "la i-ième boule extraite est rouge".
On a clairement par indépendance mutuelle :

$$\begin{aligned} P(X = k) &= P(B_1) \times P(B_2) \times \ldots \times P(B_{k-1}) \times P(R_k) \\ &= q \times q \times \ldots \times q \times p \\ &= q^{k-1}p \end{aligned}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X = k) = q^{k-1}p$$

5.5 Espérance et variance

On a vu que

$$E(X) = \frac{1}{p} \quad V(X) = \frac{q}{p^2}$$

5.6 Une propriété de la loi géométrique : une loi sans mémoire

La loi géométrique possède une propriété que l'on retrouvera avec la loi exponentielle qui s'énonce de la façon suivante :

$$P(X > m + n / X > n) = P(X > m)$$

On dit que la loi géométrique est **sans mémoire.**
Démonstration
On a

$$P(X > m+n / X > n) = \frac{P(X > m+n \cap X > n)}{P(X > n)}$$

Or si $X > m+n$ alors $X > n$ donc $(X > n+m) \subset (X > n)$ et donc

$$(X > m+n \cap X > n) = (X > m+n)$$

Donc

$$P(X > m+n / X > n) = \frac{P(X > m+n)}{P(X > n)}$$

Calculons pour tout entier $k > 0, P(X > k)$. On a

$$P(X > k) = 1 - P(X \leq k) = 1 - \sum_{i=1}^{k} q^{i-1}p = 1 - p\sum_{i=1}^{k} q^{i-1} = 1 - p\sum_{i=0}^{k-1} q^{i} = 1 - p\frac{1-q^k}{1-q} = 1 - p\frac{1-q^k}{p}$$

Donc

$$P(X > k) = q^k$$

Donc

$$\frac{P(X > m+n)}{P(X > n)} = \frac{q^{m+n}}{q^n} = q^m = P(X > m)$$

6) La loi de Poisson

6.1 Situation standard

Nous n'avons pas à proprement parler d'expériences aléatoires conduisant directement à une loi de Poisson. Il s'agit en fait d'une "loi limite" qui approche la loi binomiale quand le nombre de répétition de l'expérience est suffisamment grand et que la probabilité du succès est assez faible.

6.2 Les cas classiques

La loi de Poisson est la **loi des évènements rares**. On la rencontre par exemple dans les modélisations d'accidents tels les incendies.
On peut aussi la trouver comme modélisation du nombre de personnes arrivant durant une période donnée à un péage (il ne s'agit plus ici d'un évènement rare). Dans tous les cas, c'est l'énoncé qui indique que l'on utilise cette loi comme modèle probabiliste.

6.3 L'univers image et la loi de probabilité

Dans le cas de la loi de Poisson, comme nous n'avons pas d'expérience aléatoire de référence, nous devons donner cette loi.
Dire qu'une variable aléatoire suit une loi de Poisson de paramètre λ, s'écrit

$$X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$$

L'univers image est alors

$$X(\Omega) = \mathbb{N}$$

La loi de probabilité est

$$\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

6.4 Espérance et variance

Nous avons vu que

$$E(X) = \lambda \quad V(X) = \lambda$$

6.5 Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson

Soit n un entier non nul et λ un nombre réel. On considère la variable aléatoire X_n telle que :

$$X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$$

On a

$$P(X_n = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

On va chercher la limite de cette probabilité quand n tend vers $+\infty$

On a

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{(n-k+1)(n-k+2)\dots n}{k!} = \frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}(n-j)$$

On a

$$\forall j \in [\![0, k-1]\!], n - j \underset{n\to+\infty}{\sim} n$$

Donc

$$\prod_{j=0}^{k-1}(n-j) \underset{n\to+\infty}{\sim} n^k$$

Donc

$$\binom{n}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} n^k$$

On a donc

$$\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\lambda^k}{k!}$$

On a

$$\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = e^{(n-k)\ln\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)}$$

On a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\lambda}{n} = 0$$

Donc

$$\ln\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\lambda}{n}$$

On a aussi

$$n - k \underset{n\to+\infty}{\sim} n$$

Donc

$$(n-k)\ln\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\lambda$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} (n-k)\ln\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) = -\lambda$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \lim_{n\to+\infty} e^{(n-k)\ln\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)} = e^{-\lambda}$$

Donc

$$\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-\lambda}$$

Donc

$$\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^{k}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} P(X_n = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$