Sommes doubles

THEOREME

Soit f une fonction à deux variables définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$.

Soit m et n deux entiers, on a

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} f(i,j) = \sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{n} f(i,j)$$

Le plus simple est de faire un tableau :

j \ i	0	1	...	$n-1$	n	Somme par ligne
0	$f(0,0)$	$f(1,0)$	...	$f(n-1,0)$	$f(n,0)$	$\sum_{i=0}^{n} f(i,0)$
1	$f(0,1)$	$f(1,1)$	...	$f(n-1,1)$	$f(n,1)$	$\sum_{i=0}^{n} f(i,1)$
$\vdots$						
$m-1$	$f(0,m-1)$	$f(1,m-1)$	...	$f(n-1,m-1)$	$f(n,m-1)$	$\sum_{i=0}^{n} f(i,m-1)$
m	$f(0,m)$	$f(1,m)$	...	$f(n-1,m)$	$f(n,m)$	$\sum_{i=0}^{n} f(i,m)$
Somme par colonne	$\sum_{j=0}^{m} f(0,j)$	$\sum_{j=0}^{m} f(1,j)$		$\sum_{j=0}^{m} f(n-1,j)$	$\sum_{j=0}^{m} f(n,j)$	Somme = S

La somme des sommes en rouge est égale à la somme des sommes en colonne, c'est-à-dire à la somme de toutes les cases du tableau.
On a :

$$S = \sum_{i=0}^{n} f(i,0) + \sum_{i=0}^{n} f(i,1) + \cdots + \sum_{i=0}^{n} f(i,m-1) + \sum_{i=0}^{n} f(i,m) = \sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{n} f(i,j)$$

Et

$$S = \sum_{j=0}^{m} f(0,j) + \sum_{j=0}^{m} f(1,j) + \cdots + \sum_{j=0}^{m} f(n-1,j) + \sum_{j=0}^{m} f(n,j) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} f(i,j)$$

On a bien la formule attendue.

THEOREME

Soit f une fonction à deux variables définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$.

Soit m et n deux entiers, on a

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} f(i,j) = \sum_{j=0}^{m}\sum_{i=j}^{n} f(i,j)$$

On considère la fonction g définie par :

$$g(i,j) = \begin{cases} f(i,j) & \text{si} \quad j \le i \\ 0 & \text{si} \quad i > j \end{cases}$$

On a donc

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} g(i,j) = \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{i} g(i,j) + \sum_{j=i+1}^{m} g(i,j)\right) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} g(i,j) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} f(i,j)$$

Or

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} g(i,j) = \sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{n} g(i,j)$$

On a

$$\sum_{i=0}^{n} g(i,j) = \sum_{i=0}^{j-1} g(i,j) + \sum_{i=j}^{n} g(i,j) = 0 + \sum_{i=j}^{n} g(i,j) = \sum_{i=j}^{n} g(i,j) = \sum_{i=j}^{n} f(i,j)$$

Donc

$$\sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{n} g(i,j) = \sum_{j=0}^{m}\sum_{i=j}^{n} f(i,j)$$

Et donc

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} f(i,j) = \sum_{j=0}^{m}\sum_{i=j}^{n} f(i,j)$$