Polynômes - Racines

1) Fonctions monômes

DEFINITION

On appelle fonction monôme de degré k, où k est un entier quelconque la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^k$

Par convention la fonction monôme de degré 0 est la fonction constante égale à 1.

2) Fonctions polynômes

DEFINITION

On appelle fonction polynôme toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui s'écrit comme combinaison linéaire de fonctions monômes

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k x^k$$

3) Degré d'un polynôme

Un polynôme est une fonction définie dans $\mathbb{R}$ qui s'écrit comme une combinaison linéaire de fonctions monômes. On réduit le polynôme, c'est-à-dire on ne fait apparaître chaque monôme qu'une seule fois. Cette opération réalisée, la nouvelle combinaison linéaire obtenue contient un monôme dont le degré est le plus élevé et dont le coefficient n'est pas nul.
Le degré de ce monôme est appelé degré du polynôme.

4) Opérations sur les polynômes

On peut additionner, soustraire, multiplier des polynômes.

THEOREME *Le degré de la somme ou de la différence de deux ou plusieurs polynômes est inférieur ou égal au degré du polynôme de plus haut degré*

$(7x^2 + 3x - 1) - (5x + 3)$ sera un polynôme de degré ≤ 2. (ici 2)
$(7x^2 + 3x - 1) + (-7x^2 + 5x + 3)$ sera un polynôme de degré ≤ 2. (ici 1)

THEOREME *Le degré du produit de deux polynômes est égal à la somme des degrés de ces polynômes.*
Le terme de plus haut degré dans ce produit est obtenu par le produit des termes de plus haut degré de chacun des deux polynômes.
Le terme de plus bas degré est obtenu par le produit des termes de plus bas degré de chacun des polynômes

Par exemple

$$P(x) = 5x^7 + 4x^6 - 2x^5 + 3x^3 + 9x^2 - 7x + 3$$
$$Q(x) = 11x^4 + 6x^3 - 5x^2 + 9x - 5$$

Le produit $P(x)Q(x)$ correspond à un polynôme de degré 11, dont le terme de plus haut degré sera égal à :

$$5x^7 \times 11x^4 = 55x^{11}$$

Et le terme de plus bas degré :

$$3 \times (-5) = -15$$

Ce polynôme s'écrira :

$$55x^{11} + \cdots x^{10} + \cdots \ldots \ldots \ldots + \cdots x - 15$$

5) Division euclidienne des polynômes

La division euclidienne des polynômes se pose comme une division.

6) Divisibilité

DEFINITION *Un polynôme P_1 est divisible (ou factorisable) par un polynôme P_2 si le reste de la division euclidienne de P_1 par P_2 est le polynôme nul.*

Si Q est le polynôme quotient dans cette division euclidienne, on peut écrire pour tout réel x

$$P_1(x) = P_2(x)Q(x)$$

7) Divisibilité par $x - a$

Si $P_2(x) = x - a$, où a est un nombre réel et que P_1 est divisible par P_2, on aura : $P_1(x) = (x - a)Q(x)$.
On a alors $P_1(a) = (a - a)Q(a) = 0$
On a donc un premier résultat :

THEOREME *Si un polynôme $P(x)$ est divisible par $x - a$, alors a est un zéro de ce polynôme.*

8) Division euclidienne par $x - a$

Soit P un polynôme quelconque (dont nous supposerons le degré supérieur ou égal à 1)
On effectue la division euclidienne de $P(x)$ par $(x - a)$.
On obtient une égalité du type : $P(x) = (x - a)Q(x) + R(x)$, R étant un polynôme dont le degré est strictement inférieur à celui de $(x - a)$.
Autrement dit R est un polynôme constant (égal au polynôme nul si P(x) est divisible par $(x - a)$).
On peut donc écrire $P(x) = (x - a)Q(x) + b$ où b est un nombre réel.
On a alors $P(a) = (a - a)Q(a) + b$ et donc $b = P(a)$.
On peut donc écrire

$$P(x) = (x - a)Q(x) + P(a)$$

On a en particulier

$$P(x) - P(a) = (x - a)Q(x)$$

D'où un résultat très important :

THEOREME *Pour tout polynôme P et tout réel a, $P(x) - P(a)$ est divisible par $(x - a)$.*

9) Factorisation de $x^n - a^n$

$$\boxed{x^n - a^n = (x - a)\sum_{k=0}^{n-1} x^k a^{n-k-1}}$$

10) Zéros d'un polynôme et factorisation

Nous avons vu dans le 2) que si $P(x)$ est factorisable par $(x - a)$ alors $P(a) = 0$.
Réciproquement pour tout polynôme P, on peut écrire $P(x) - P(a) = (x - a)Q(x)$.
Donc si $P(a) = 0$, alors $P(x) = (x - a)Q(x)$ et donc $P(x)$ est factorisable par $(x - a)$.

D'où le théorème fondamental :

THEOREME

Soit P un polynôme de degré supérieur ou égal à 1. Soit a un nombre réel. P est factorisable par $(x-a)$ si et seulement si a est un zéro de P $(P(a)=0)$

11) Degré et racines

On montre le théorème suivant

THEOREME

Le nombre de racines distinctes d'un polynôme est toujours inférieur ou égal à son degré.

Autrement dit un polynôme de degré n admet au plus n racines distinctes.

Si un polynôme admet k racines distinctes $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$, alors ce polynôme s'écrit

$$P(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_k)Q(x)$$

Si $k=n$, autrement dit si le polynôme $P(x)$ a autant de racines distinctes que son degré, on pourra écrire

$$P(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)Q(x)$$

On aura alors

$$n=\underbrace{1+1+\ldots+1}_{n\text{ termes}}+d^\circ(Q)=n+d^\circ(Q)$$

Donc $d^\circ(Q)=0$, donc Q est un polynôme constant.
On peut poser par exemple $Q(x)=\lambda$.

On aura alors

$$P(x)=\lambda(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_n)$$

On peut remarquer que $\lambda=a_n$.

12) Le procédé d'identification

Considérons un polynôme $P(x)$ que l'on suppose de degré n.
Supposons que $\forall x\in\mathbb{R}, P(x)=0$.
Cela signifierait que P possède plus de n racines (une infinité ici). Ce qui est impossible d'après le résultat précédent, sauf bien sûr si P est le polynôme nul.
Un polynôme de degré n possédant plus de n racines est nécessairement le polynôme nul.

Considérons deux polynômes P et Q de degré n et p tels que $\forall x\in\mathrm{R}, P(x)=Q(x)$.
Supposons que $n>p$.
On aura $P(x)=a_nx^n+\ldots+a_{p+1}x^{p+1}+a_px^p+\ldots+a_1x+a_0$ et $Q(x)=b_px^p+\ldots+b_1x+b_0$.
Si $P(x)=Q(x)$, alors $P(x)-Q(x)=0$ et donc

$$a_nx^n+\ldots+a_{p+1}x^{p+1}+(a_p-b_p)x^p+\ldots+(a_1-b_1)x+(a_0-b_0)=0,\text{pourtout}x\in\mathrm{R}$$

D'après le résultas précédent, cela signifie que :

$$a_n=\ldots=a_{p+1}=0$$

Et que

$$\forall j, 0 \leq j \leq p, a_j - b_j = 0$$

On peut donc énoncer le théorème :

THEOREME *Deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont même degré et s'ils ont les mêmes coefficients.*

Ce qui permet de justifier que : $ax^3 + bx^2 + cx + d = 3x^2 - 5x + 1$ conduit à : $\begin{cases} a = 0 \\ b = 3 \\ c = -5 \\ d = 1 \end{cases}$

13) Racines "évidentes"

Factoriser un polynôme revient à déterminer ses racines, ce qui n'est pas toujours facile.
On a coutume de chercher si par chance certaines valeurs "simples" (qui permettent des calculs assez faciles) ne sont pas des racines.
Traditionnellement on se limite aux nombres : $-2, -1, 0, 1, 2$. Certains vont jusqu'à -3 et 3.
Pour 0, c'est assez évident : il faut que le terme constant du polynôme soit égal à 0 : $P(x) = x^5 + x^3 + 3x^2 + x$ est factorisable par x.
Pour 1, il suffit de faire la somme des coefficients : $P(x) = x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 7x + 4$ est divisible par $(x-1)$ car $1 - 3 + 5 - 7 + 4 = 0$
Pour les autres, il faut faire une vérification.

14) Racines multiples

On dit que a est une racine d'ordre k d'un polynôme $P(x)$ si $P(x)$ est factorisable par $(x-a)^k, k \geq 1$.
Pour les cas $k = 1,2,3$, on parle de racine simple, racine double, racine triple.
On a par exemple

$$\begin{aligned} P(x) &= 2\,x^4 - 3\,x^3 - 3\,x^2 + 7\,x - 3 \\ &= (x-1)^3(2x+3) \end{aligned}$$

On dit que 1 est racine triple de P.
On a évidemment dès le départ $P(1) = 0$

$$P(1) = 2 \times 1^4 - 3 \times\ 1^3 - 3 \times\ 1^2 + 7 \times 1 - 3 = 0$$

Si l'on divise $P(x)$ par $(x-1)$ on obtient :

$$P(x) = (x-1)(2\,x^3 - x^2 - 4\,x + 3)$$

On a

$$2\ \times 1^3 - 1^2 - 4\ \times 1 + 3 = 0$$

On recommence avec $(2\,x^3 - x^2 - 4\,x + 3)$
On a

$$2\,x^3 - x^2 - 4\,x + 3 = (x-1)(2\,x^2 + x - 3)$$

On a

$$2 \times 1^2 + 1 - 3 = 0$$

On a enfin

$$2\,x^2 + x - 3 = (x-1)(2x+3)$$

Donc

$$P(x) = (x-1)(2\,x^3 - x^2 - 4\,x + 3)$$

$$= (x-1)(x-1)(2\,x^2+x-3)$$
$$= (x-1)(x-1)(x-1)(2x+3)$$
$$= (x-1)^3(2x+3)$$

15) Ordre de multiplicité et dérivées successives

On a le théorème suivant :

THEOREME

Soit P un polynôme de degré n et a un nombre réel. a est une racine d'ordre m, $1 \leq m \leq n$, si et seulement si $\forall k,\ 0 \leq a \leq m-1,\ P^{(k)}(a) = 0$ et $P^{(m)}(a) \neq 0$

Par exemple avec

$$P(x) = 2\,x^4 - 3\,x^3 - 3\,x^2 + 7\,x - 3$$

Nous avons vu que $P(1) = 0$

On a

$$P'(x) = 8\,x^3 - 9\,x^2 - 6\,x + 7$$

On a

$$P'(1) = 8\ \times 1^3 - 9\ \times 1^2 - 6\ \times 1 + 7 = 0$$

On a

$$P''(x) = 24\,x^2 - 18\,x - 6$$

On a

$$P''(1) = 24\ \times 1^2 - 18\ \times 1 - 6 = 0$$

On a

$$P^3(x) = 48\,x - 18$$

On a

$$P^3(1) = 48\ \times 1 - 18 = 30 \neq 0$$

On retrouve que 1 est racine d'ordre 3 et donc que

$$P(x) = (x-1)^3 Q(x)$$