

# Le raisonnement

## par récurrence

### 1) Propriété dépendant d'un entier

Considérons la propriété suivante :

La somme des  $n$  premiers nombres entiers non nuls est égale à  $\frac{n(n+1)}{2}$

Quelle est la signification exacte de cette propriété ?

Traduite autrement, elle s'écrit :

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Ou, si nous appelons  $S_n$  la somme  $1 + 2 + \dots + n$ , soit

$$S_n = 1 + 2 + \dots + n$$

La propriété dit que :

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

On a

$$S_2 = 1 + 2$$

$$S_3 = 1 + 2 + 3$$

$$S_4 = 1 + 2 + 3 + 4$$

...

Par **abus de langage**

$$S_1 = 1$$

Cette propriété est-elle vraie pour  $S_1, S_2, S_3, S_4$  ?

On a

$$S_1 = 1 \text{ et } \frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ donc } S_1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

$$S_2 = 1 + 2 = 3 \text{ et } \frac{2(2+1)}{2} = 3 \text{ donc } S_2 = \frac{2(2+1)}{2}$$

$$S_3 = 1 + 2 + 3 = 6 \text{ et } \frac{3(3+1)}{2} = \frac{3 \times 4}{2} = 6 \text{ donc } S_3 = \frac{3(3+1)}{2}$$

$$S_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10 \text{ et } \frac{4(4+1)}{2} = 2 \times 5 = 10 \text{ donc } S_4 = \frac{4(4+1)}{2}$$

La propriété énoncée est donc vérifiée quand le nombre  $n$  prend les valeurs 1,2,3 ou 4.

Pour préciser que cette propriété dépend de  $n$ , on la désigne souvent par la lettre  $P_n$ .

On pourra dire que  $P_1, P_2, P_3, P_4$  sont vérifiées ou encore qu'elles sont vraies.

Mais bien évidemment cela ne dit rien sur  $P_{20}, P_{100}$  ou  $P_{10000000}$ .

Serait-on capable de vérifier ces trois cas particuliers que cela ne permettrait pas de conclure pour n'importe quel autre cas qui nous serait proposé... Et rien ne permettrait de dire qu'il n'y a pas au moins un cas bizarre pour lequel cette propriété n'est pas vérifiée.

## 2) Initialiser une propriété $P_n$

On dit que l'on a initialisé une propriété  $P_n$  si on l'a vérifié pour la plus petite valeur que peut prendre  $n$ .

Dans l'exemple précédent, on a bien initialisé la propriété  $P_n$  proposée puisque l'on a montré que la propriété  $P_1$  est vérifiée.

Il se peut que nous devions procéder à une initialisation multiple : par exemple vérifier que les deux premières propriétés, ou les trois premières, ..., sont vérifiées.

Mais dans la très grande majorité des cas, l'initialisation se fera sur une seule valeur.

## 3. Propriété héréditaire

On dit qu'une propriété  $P_n$  est héréditaire pour traduire la situation suivant :

Quelle que soit la valeur de l'entier  $n$ , si la propriété  $P_n$  est vérifiée alors la propriété  $P_{n+1}$  est également vérifiée.

### Quelques remarques essentielles :

- Il n'est jamais dit que la propriété  $P_n$  a été vérifiée, mais que si on suppose qu'elle l'a été alors nécessairement la propriété  $P_{n+1}$  le sera.  
A la limite, la propriété  $P_n$  pourrait bien être fausse.  
Ce qui est dit, c'est que si elle avait été vraie, alors la propriété  $P_{n+1}$  le serait aussi.
- Pour passer de  $P_n$  à  $P_{n+1}$ , il est impératif que nous puissions relier les deux propriétés pour que la vérification de la seconde soit bien la conséquence de la vérification de la première.  
Si l'on ne peut pas relier  $P_n$  et  $P_{n+1}$ , l'hérédité ne sera pas démontrable.

La propriété vue au 1) est héréditaire.

En effet, cette propriété affirme **au rang  $n$** , que

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad (P_n)$$

Quelle est son expression au rang  $(n+1)$  ?

$$1 + 2 + 3 + \dots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad (P_{n+1})$$

Est-ce que si nous avons vérifié  $(P_n)$ , nous pourrions affirmer que  $(P_{n+1})$  est également vérifiée ?

Dire que  $(P_n)$  est vérifiée, c'est dire que

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Donc, en ajoutant  $(n+1)$  aux deux membres de cette égalité :

$$1 + 2 + 3 + \dots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

Or

$$\begin{aligned} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad \text{par factorisation} \end{aligned}$$

Ce qui montre bien que la propriété  $(P_{n+1})$  est vérifiée si  $(P_n)$  est vérifiée.

La propriété  $(P_n)$  est donc héréditaire.

Certaines propriétés se démontrent directement sans utiliser une éventuelle hérédité. Par exemple, pour tout entier  $n$ ,

$$n^2 \geq 2n - 1$$

On a évidemment

$$n^2 - 2n + 1 = (n - 1)^2 \geq 0$$

On a donc bien

$$n^2 \geq 2n - 1$$

#### **4) Le principe du raisonnement par récurrence**

*Si une propriété est vraie pour un entier  $m$  et qu'elle est héréditaire pour tout entier supérieur ou égal à  $m$ , alors elle est vraie pour tout entier  $n \geq m$ .*

La conclusion est ici beaucoup plus forte que dans le cas de l'hérédité simple. On n'affirme plus que si  $P_n$  est vérifiée alors  $P_{n+1}$  l'est aussi, mais bel et bien que  $\forall n \geq m, P_n$  est vraie.

Souvent  $m$  est égal à 0 ou 1.

Concernant la propriété que l'on a rencontrée jusqu'ici, on peut maintenant affirmer qu'elle est vraie pour tout entier  $n \geq 1$ . C'est-à-dire que  $\forall n \geq 1$ , on a :

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Ce que l'on écrit souvent

$$\boxed{\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}}$$

En effet, cette propriété est vraie pour  $n = 1$  : elle est initialisée. Et elle est héréditaire : si elle est vérifiée au rang  $n$ , alors elle est vérifiée au rang  $(n + 1)$ .

#### **Justification du principe de récurrence**

Supposons qu'une certaine propriété  $P_n$  soit vraie pour un entier  $m$  et que pour tout entier supérieur ou égal à  $m$ , elle soit héréditaire.

Nous avons affirmé dans le principe de récurrence que cette propriété sera alors toujours vraie.

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi. Cela signifie qu'on trouvera un entier  $M$  pour lequel la propriété sera fautive, c'est-à-dire que  $P_M$  est fautive.

Mais alors  $P_{M-1}$  est également fautive. En effet, si  $P_{M-1}$  était vérifiée, par l'hérédité, on devrait avoir  $P_M$  également vérifiée.

En effet la propriété « précédant » une propriété fautive à cause de l'hérédité. Ainsi les propriétés  $P_{M-2}, P_{M-3} \dots$  seront fautives. « En descendant » de cette façon, on aboutit nécessairement à la propriété  $P_m$  qui devrait donc être fautive.

Or on sait par hypothèse qu'elle est vraie.

Si nous supposons donc qu'une propriété est fautive, on aboutit à un résultat absurde.

Donc l'initialisation et l'hérédité permettent bien d'affirmer que la propriété est toujours vraie à partir de  $m$ .

Remarques importantes : les deux propriétés sont fondamentales. Si l'une est absente, la propriété est probablement fautive.

Si nous considérons par exemple la propriété :

$$(P_n) : \mathbf{10^n + 1 \text{ est un multiple de } 9}$$

Examinons le caractère héréditaire de cette propriété.

La propriété au rang  $(n + 1)$  s'écrit :

$$(P_{n+1}) : 10^{n+1} + 1 \text{ est un multiple de } 9.$$

Si  $(P_n)$  est vérifiée, est-ce que l'on a  $(P_{n+1})$  vérifiée ?

Traduisons d'abord ce que signifie qu'un nombre entier est un multiple de 9.

Cela signifie qu'il peut s'écrire comme le produit d'un entier par 9.

Ainsi la propriété  $(P_n)$  peut se traduire par :

Il existe un entier  $k$  tel que  $10^n + 1 = 9k$

Alors

$$10^n = 9k - 1$$

Or

$$10^{n+1} = 10 \times 10^n$$

Donc, si la propriété  $(P_n)$  est bien vérifiée :

$$10^{n+1} = 10(9k - 1) = 90k - 10$$

Donc en ajoutant 1 de chaque côté

$$10^{n+1} + 1 = 90k - 9 = 9(10k - 1)$$

Ce qui prouve que la propriété  $(P_{n+1})$  est bien vérifiée.

La propriété  $(P_n)$  est bien héréditaire.

Mais elle n'est pas initialisée.

En effet

$$10^0 + 1 = 1$$

Ce n'est pas un multiple de 9. Donc  $(P_0)$  est fausse.

On ne peut donc pas en conclure que la propriété  $(P_n)$  est vraie ; mais on ne peut pas conclure non plus qu'elle est fausse : en effet, il se peut qu'elle « démarre » plus loin.

Ce que l'on sait, c'est que si à un certain rang, elle devient vraie, alors par hérédité elle sera vraie pour tout entier supérieur à ce rang.

En fait on a

$$10^1 + 1 = 11$$

$$10^2 + 1 = 101$$

...

On « sent » bien que nous n'obtiendrons jamais un multiple de 9, puisque tous les nombres de la forme  $10^n + 1$  commencent et finissent par 1 et ne contiennent que des 0 : ils ne pourront pas obéir au critère de divisibilité par 9.

Mais ce n'est pas une vraie démonstration.

Comme il semble que cette propriété soit effectivement toujours fausse, on pourra par exemple démontrer par récurrence la propriété :  $10^n + 1$  n'est pas un multiple de 9. C'est nettement plus délicat.

Examinons maintenant cette autre propriété : pour  $n \geq 1$ ,  $10^n + 1$  est un multiple de 11.

Appelons  $(Q_n)$  cette propriété.

$(Q_1)$  est vérifiée. Mais pas  $(Q_2)$ . Puis  $(Q_3)$  est vérifiée, mais pas  $(Q_4)$ .

Bien qu'initialisée, cette propriété est fausse. En fait elle n'est vérifiée que pour les nombres impairs.

On pourrait poser une nouvelle propriété : pour  $n \geq 0$ ,  $10^{2n+1} + 1$  est un multiple de 11.

Appelons  $(R_n)$  cette propriété.

Elle est vérifiée pour  $n = 0$ , car  $10^{2 \times 0 + 1} + 1 = 10 + 1 = 11$

Examinons l'hérédité.

Si la propriété est vérifiée pour un certain entier  $n$ , est-elle vérifiée également pour l'entier suivant ?

Autrement dit, si  $10^{2n+1} + 1$  est un multiple de 11,  $10^{2(n+1)+1} + 1$  est-il aussi un multiple de 11 ?

On a par hypothèse l'existence d'un nombre entier  $k$ , tel que :

$$10^{2n+1} + 1 = 11k$$

On a donc :

$$10^{2n+1} = 11k - 1$$

D'autre part,

$$10^{2(n+1)+1} + 1 = 10^{2n+3} + 1 = 10^2 10^{2n+1} + 1 = 100 \times 10^{2n+1} + 1$$

On a donc

$$10^{2(n+1)+1} + 1 = 100(11k - 1) + 1 = 110k - 100 + 1 = 110k - 99$$

On en déduit que

$$10^{2(n+1)+1} + 1 = 11(10k - 11)$$

Ce qui prouve que  $10^{2(n+1)+1} + 1$  est un multiple de 11.

Il y a hérédité et comme la propriété est initialisée, le principe de récurrence permet d'affirmer que la propriété est démontrée.

### Remarque :

La propriété d'hérédité se construit en considérant supposant qu'une certaine propriété ( $P_n$ ) est vérifiée et qu'alors la propriété ( $P_{n+1}$ ) est vérifiée.

La propriété ( $P_n$ ) est appelé *propriété de récurrence*.

## 5) Récurrence et somme : la règle des dominos

Nous avons vu dans le premier exemple la démonstration d'une propriété qui faisait intervenir une somme.

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Un cas très important est la règle des dominos (on parle également de calculs en cascade) :

Soit  $f$  une fonction définie pour tout entier  $n$ . On a

### THEOREME

$$\sum_{k=0}^n (f(k+1) - f(k)) = f(n+1) - f(0)$$

### Démonstration :

La propriété doit être vérifiée pour tous les entiers. On doit donc l'initialiser pour  $n = 0$ .

Si l'on appelle ( $P_n$ ) la propriété à démontrer, on aura :

$$(P_0) : \sum_{k=0}^0 (f(k+1) - f(k)) = f(0+1) - f(0)$$

Cette propriété est-elle vérifiée ?

Cette égalité est totalement évidente.

Examinons l'hérédité. On suppose donc pour un  $n$  quelconque, la propriété est vérifiée, c'est-à-dire que :

$$\sum_{k=0}^n (f(k+1) - f(k)) = f(n+1) - f(0)$$

On doit alors démontrer que la propriété est vérifiée au rang suivant :

$$\sum_{k=0}^{n+1} (f(k+1) - f(k)) = f((n+1)+1) - f(0) = f(n+2) - f(0)$$

On peut écrire :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} (f(k+1) - f(k)) &= \sum_{k=0}^n (f(k+1) - f(k)) + f((n+1)+1) - f(n+1) \\ &= \sum_{k=0}^n (f(k+1) - f(k)) + f(n+2) - f(n+1) \end{aligned}$$

Si l'on utilise l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} (f(k+1) - f(k)) &= f(n+1) - f(0) + f(n+2) - f(n+1) \\ &= f(n+2) - f(0)\end{aligned}$$

L'hérédité est démontrée.

On peut donc conclure que la propriété  $(P_n)$  est toujours vraie. On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n (f(k+1) - f(k)) = f(n+1) - f(0)$$

### Remarque

Dans de nombreux cas, la fonction  $f$  ne sera pas définie en 0.

Si elle « démarre » en 1, on aura :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n (f(k+1) - f(k)) = f(n+1) - f(1)$$

Si elle démarre à 2, on aura :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}, \sum_{k=2}^n (f(k+1) - f(k)) = f(n+1) - f(2)$$

Une autre formulation que l'on rencontre parfois est la suivante :

$$\forall n \geq 1, \sum_{k=0}^{n-1} (f(k+1) - f(k)) = f(n) - f(0)$$

Ou de la même façon

$$\forall n \geq 2, \sum_{k=1}^{n-1} (f(k+1) - f(k)) = f(n) - f(1)$$

### Deux exemples d'application

On a par exemple :

$$\forall n \geq 1, \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{1} = \frac{1}{n+1} - 1$$

Ou

$$\forall n \geq 1, \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln(k)) = \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1)$$

## 6) Le principe de récurrence forte

### THEOREME

Soit  $(P_n)$  une propriété mathématique. On sait que  $(P_0)$  est vraie. On sait aussi que, pour un  $n$  quelconque, si toutes les propositions  $(P_0), (P_1), \dots, (P_n)$  sont vérifiées, alors  $(P_{n+1})$  est vérifiée aussi. Alors, pour tout entier  $n$ , la propriété  $(P_n)$  est vraie.

Dans ce cas, il est nécessaire que toutes les propriétés précédentes soient vraies ce qui constitue une contrainte supplémentaire.

Nous rencontrerons ce type de récurrence avec des suites.