# Comparaison locale des fonctions

## 1) Fonction négligeable

**Definition**

*$f$ et $g$ sont deux fonctions définies sur un intervalle $I$. Soit $a$ un élément de $I$ ou une borne de $I$.*
*On dit que $f$ est négligeable devant $g$ au voisinage de $a$ si et seulement si il existe $\alpha > 0$ et une fonction $\varepsilon : ]a-\alpha, a+\alpha[ \to \mathbb{R}$ tels que :*

$$\forall x \in ]a-\alpha, a+\alpha[ \cap I, f(x) = g(x)\varepsilon(x) \text{avec} \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$$

*Dans ces conditions on note : $f \underset{a}{=} o(g)$ ou $f \underset{x \to a}{=} o(g)$ et lorsqu'aucune confusion n'est possible, $f = o(g)$*
*En pratique si la fonction $g$ ne s'annule pas au voisinage de $a$, on dit que $f$ est négligeable devant $g$ pour signifier que:*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

> Montrer que la fonction $x \mapsto x$ est négligeable devant la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ au voisinage de 0.

Remarquons dire que $g$ ne s'annule pas au voisinage de $a$ ne signifie pas que $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$ comme le montre l'exemple précédent.

**Definition**

*On dit que $f$ est négligeable devant $g$ au voisinage de $+\infty$ si et seulement si il existe $\alpha > 0$ et une fonction $\varepsilon : ]\alpha, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ tels que :*

$$\forall x \in ]\alpha, +\infty[, f(x) = g(x)\varepsilon(x) \text{avec} \lim_{x \to +\infty} \varepsilon(x) = 0$$

*Dans ces conditions on notera $f = \underset{+\infty}{o}(g)$ ou $f = \underset{x \to +\infty}{o}(g)$, ou encore si aucune confusion n'est possible, $f = o(g)$.*
*En pratique cela revient à montrer que*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$f$ et $g$ sont deux fonctions définies sur un intervalle $]a, +\infty[$.

> Justifier que la fonction $x \mapsto x$ est négligeable devant $x \mapsto e^x$ au voisinage de $+\infty$.

On aura une définition de même type pour la négligeabilité en $-\infty$.

## 2) Opérations sur les fonctions négligeables

**PROPRIETES**

*$f$ et $g$ étant deux fonctions définies sur un même intervalle $I$, $a$ un élément de $I$ ou une borne de $I$ (ou $+\infty$ ou $-\infty$).*

*ng1) Si $f = o(g)$ et si $g = o(h)$ alors $f = o(h)$*

*ng2) Si $f_1 = o(g)$ et si $f_2 = o(g)$ alors $f_1 + f_2 = o(g)$*

*ng3) Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$, si $f = o(g)$ alors $\lambda f = o(g)$ et $f = o(\lambda g)$*

*ng4) Si $f_1 = o(g_1)$ et si $f_2 = o(g_2)$ alors $f_1 f_2 = o(g_1 g_2)$*

1° Démontrer ces quatre propriétés.

2° Démontrer la propriété suivante :
Soit $(f_k)_{1\leq k\leq n}$ une famille de $n$ fonctions telles que

$$\forall k \in [\![1,n]\!], f_k = o(g)$$

alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f_k = o(g)$

3° On considère les fonctions $f_1 : x \mapsto x$, $f_2 : x \mapsto x+1$ et $g : x \mapsto x^2$.
Montrer que $f_1$ et $f_2$ sont négligeables devant $g$ en $+\infty$.
En est-il de même pour le produit $f_1 f_2$ ?
Que peut-on en conclure pour le produit de fonctions négligeables ?

4° Soit $(f_k)_{1\leq k\leq n}$ et $(g_k)_{1\leq k\leq n}$ deux familles de $n$ fonctions telles que

$$\forall k \in [\![1,n]\!], f_k = o(g_k)$$

Montrer que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} f_k = o\left(\prod_{k=1}^{n} g_k\right)$

5° On considère les fonctions $f_1 : x \mapsto x$, $f_2 : x \mapsto x+1$, $g_1 : x \mapsto e^x$ et $g_2 : x \mapsto -e^x + x$.
Montrer que $f_1 \underset{+\infty}{=} o(g_1)$ et que $f_2 \underset{+\infty}{=} o(g_2)$.
A-t-on $f_1 + f_2 \underset{+\infty}{=} o(g_1 + g_2)$ ? Conclure.

## 3) Les théorèmes de croissance comparée

Ces théorèmes qui ont été vus en classe terminale constituent un véritable constructeur de fonctions négligeables.
Nous les donnerons ici sans démonstration. Ces théorèmes ont été revus et démontrés dans le TD sur les limites usuelles.

| conditions | limites | fonctions négligeables |
|---|---|---|
| | $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ | $\ln(x) \underset{+\infty}{=} o(x)$ |
| $\forall \alpha > 0$ | $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0$ | $\ln(x) \underset{+\infty}{=} o(x^\alpha)$ |

| | | |
|---|---|---|
| $\forall\alpha>0,\forall\beta>0$ | $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln(x))^\beta}{x^\alpha}=0$ | $(\ln(x))^\beta \underset{+\infty}{=} o(x^\alpha)$ |
| | $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln(x)=0$ | $\ln(x)\underset{0^+}{=} o\left(\dfrac{1}{x}\right)$ |
| $\forall\alpha>0,\forall n\in\mathbb{N}^*$ | $\lim\limits_{x\to0^+} x^\alpha(\ln(x))^n=0$ | $(\ln(x))^n\underset{0^+}{=} o\left(\dfrac{1}{x^\alpha}\right)$ |
| | $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$ | $x\underset{+\infty}{=} o(e^x)$ |
| $\forall\alpha>0,\forall\beta>0$ | $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^\alpha}{e^{\beta x}}=0$ | $x^\alpha\underset{+\infty}{=} o(e^{\beta x})$ |
| | $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$ | $e^x\underset{-\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x}\right)$ |
| $\forall\alpha>0,\forall\beta>0$ | $\lim\limits_{x\to-\infty} x^\alpha e^{\beta x}=0$ | $e^{\beta x}\underset{-\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^\alpha}\right)$ |

## 4) Fonctions équivalentes

**DEFINITION**

*$f$ et $g$ deux fonctions définies sur un intervalle $I$ et $a$ un élément de $I$ ou une borne de $I$.*

*On dit que $f$ et $g$ sont équivalentes au voisinage de $a$ si et seulement si :*

*il existe $\alpha>0$ et une fonction $\varepsilon: ]a-\alpha,a+\alpha[$ dans $\mathbb{R}$ tels que $\forall x\in ]a,+\infty[, f(x)=g(x)(1+\varepsilon(x))$ avec $\lim\limits_{x\to a}\varepsilon(x)=0$*

*Dans ces conditions, on notera $f\underset{a}{\sim}g$ ou plus simplement s'il n'y a pas d'ambiguïté : $f\sim g$*

*En pratique si $g(x)\neq0$ lorsque $x$ est proche de $a$, dire que $f$ est équivalent à $g$ au voisinage de $a$ revient à dire que*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1$$

**Exemple**

On considère la fonction $f$ définie sur $[-1,0[\cup]0,+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{\sqrt{1+x}-1}{\frac{1}{2}x}$$

1) Montrer que l'on a $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{1+x}+1}$

2) En déduire que $\sqrt{1+x}-1\underset{0}{\sim}\dfrac{1}{2}x$

On a des équivalents classiques en 0 :

$$\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$$
$$e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$$

On a une définition du même type en l'infini :

**DEFINITION**

*$f$ et $g$ sont deux fonctions définies sur un intervalle $]a, +\infty[$.*
*On dit que $f$ est équivalente à $g$ au voisinage de $+\infty$ si et seulement si :*
*il existe $\alpha > 0$ et une fonction $\varepsilon : ]\alpha, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ tels que $\forall x \in ]\alpha, +\infty[, f(x) = g(x)(1 + \varepsilon(x))$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} \varepsilon(x) = 0$*
*Dans ces conditions on notera $f \underset{+\infty}{\sim} g$ , ou encore si aucune confusion n'est possible, $f \sim g$.*
*En pratique dire que $f$ est équivalent à $g$ au voisinage de $+\infty$ revient à dire que*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

On définit de la même façon l'équivalence au voisinage de $-\infty$.

# 4) Propriétés de l'équivalence

$a$ étant un réel ou +∞ ou -∞.
On a les propriétés suivantes qui sont des conséquences des théorèmes sur les limites :

**PROPRIETES**

1) Si $f \sim g$ alors $g \sim f$ (symétrie de la relation d'équivalence)
2) Si $f \sim g$ et si $g \sim h$ alors $f \sim h$ (transitivité de la relation d'équivalence).
3) Si $f_1 \sim g_1$ et si $f_2 \sim g_2$ alors $f_1 f_2 \sim g_1 g_2$ (compatibilité avec le produit).
4) Si $f_1 \sim g_1$ et si $f_2 \sim g_2$ alors $\frac{f_1}{f_2} \sim \frac{g_1}{g_2}$(compatibilité avec le quotient, sous réserve d'existence des deux membres).
5) Si $f \sim g$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ alors $f^\alpha \sim g^\alpha$ (compatibilité avec l'élévation à une puissance, sous réserve d'existence).
6) Si $f \sim g$ alors $|f| \sim |g|$ (compatibilité avec la valeur absolue)
7) Deux fonctions équivalentes ont même limite si cette limite existe.
8) Si $f(x) \to \ell$ et si $\ell \neq 0$ alors $f \sim \ell$. (attention au cas $\ell = 0$)
9) Si $f \sim g$ et si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \begin{cases} 0^+ \\ +\infty \end{cases}$ alors $\ln(f) \sim \ln(g)$
(en général il n'y a pas compatibilité avec la composition d'où l'intérêt de cette situation particulière).
10) Si $f = o(g)$ alors $f + g \sim g$

1° Montrer que si $a \neq 0, ax^3 + bx^2 + cx + d \underset{\pm\infty}{\sim} ax^3$

2° De façon générale démontrer que tout polynôme est équivalent à son terme de plus haut degré en $+\infty$ ou en $-\infty$.

3° Déterminer un équivalent de $\sqrt{2x^2 - 3x + 1}$ en $+\infty$.

4° Calculer la limite de $\dfrac{2x^2 + 3x + 1}{-x^2 + x - 3}$ quand x tend vers $+\infty$.

5° Montrer que $\forall n \in [2, +\infty[ \cap \mathbb{N}$, $x^n$ est négligeable devant $x$ quand vers 0. En déduire un équivalent de $x^3 + 2x^2 + 5x$ au voisinage de 0

## Les pièges les plus fréquents :

Remplacer des équivalents dans une somme :

Par exemple $f(x) = x + 1$ et $g(x) = -x + 1$.

On a $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x$ et $g(x) \underset{+\infty}{\sim} -x$

Or $f(x) + g(x) = 2$ qui n'est pas équivalent à 0.

Utiliser des fonctions composées avec des équivalents

$f(x) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} \quad et\ g(x) = \dfrac{1}{x^2}$

On a

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{x^2}} = x^2\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{\sqrt{x} + x^2}{\sqrt{x}} = \frac{1 + x\sqrt{x}}{1} = 1 + x\sqrt{x}$$

Donc

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

donc $f \underset{0}{\sim} g$

A-t'on $e^f \sim e^g$ . Nous allons voir que non.

On a

$$\frac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}} = e^{f(x) - g(x)} = e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$$

Or

$$\lim_{x \to 0} e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = +\infty$$