Continuité – Dérivabilité

I) Continuité

1.1) Fonction continue en un point a

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un élément de I.

DEFINITION *On dit que f est continue en a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$*

1.2) Fonction continue sur un intervalle

DEFINITION *On dit qu'une fonction f est continue sur un intervalle I si elle est continue en tout point de cet intervalle.*

Graphiquement cela se traduit par le fait que la courbe représentative de est « d'un seul tenant ».

1.3) Continuité à droite, continuité à gauche

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un élément de I.

DEFINITION *On dit qu'une fonction f est continue à droite (respectivement à gauche) en a si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = f(a)$ (respectivement $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = f(a)$).*
Une fonction est continue en a si et seulement si elle est continue à droite et à gauche en a.

La fonction partie entière de x est continue à gauche mais pas à droite quand x est un entier.
On note cette fonction souvent $\mathrm{E}(x)$ ou $\mathrm{ent}(x)$ ou encore $[x]$. Elle est définie comme le plus grand entier inférieur à x.
On a par exemple

$$[3,1] = 3, [5,3] = 5$$

Il est évident que si x est l'entier n, on aura

$$[n] = n$$

On a pour tout réel x :

$$[x] \leq x < [x] + 1$$

On aura

$$\lim_{\substack{x \to n \\ x \geq n}} [x] = n$$

Et

$$\lim_{\substack{x \to n \\ x < n}} [x] = n - 1$$

1.4) Prolongement par continuité

On considère un intervalle I dont au moins l'une des bornes est finie. Soit a un élément de I ou l'une des bornes finies de I
Soit f une fonction définie sur I sauf en a.

THEOREME *Si $f(x)$ tend vers une limite finie ℓ quand x tend vers a alors la fonction g définie sur I par*

$$g(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in I \backslash \{a\} \\ \ell \text{ si } x = a \end{cases}$$

est continue en a.

On dit que l'on a prolongé f par continuité en a, ou que g est le prolongement de f par continuité en a.

THEOREME *Si f est continue sur $I\backslash\{a\}$, alors g est continue sur I.*

Dans de nombreux problèmes, on demande de prouver la continuité de g. Il faut donc alors justifier que f est continue sur $I\backslash\{a\}$, et que g est continue en a.

Par exemple, on donne une fonction sous la forme suivante :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x} & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

et l'on demande d'étudier la continuité de f.

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.
Elle est le prolongement continue de la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$x \to \frac{\ln(1+x^2)}{x}$$

Bien entendu on aurait pu prolonger cette fonction par une fonction **non continue** en 0 en prenant par exemple

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x} & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

Dans le cas où un prolongement continue existe, l'intérêt d'un prolongement discontinue est faible.

Parfois un prolongement continue n'existe que d'un seul côté comme le montre l'exemple suivant :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = e^{1/x}$

Etudier la possibilité d'un prolongement continue de cette fonction

Montrer que l'on peut prolonger f en une fonction g continue à gauche mais pas à droite.

1.5) Continuité et suites

THEOREME *Soit f une fonction définie sur un intervalle I, continue en un point a de I. Alors si (u_n) est une suite définie sur I de limite a, on a*

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(a)$$

La réciproque est vraie : si (u_n) est une suite définie sur I de limite a, et si l'on a

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(a$$

alors f est continue en a.

Une conséquence importante est le théorème du point fixe :

THEOREME *On considère une suite récurrente (u_n) définie sur un intervalle fermé I par une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$.*

Si la fonction f est continue en tout point de I, alors si f admet une limite ℓ, on a la relation $f(\ell)=\ell$.

En effet si (u_n) est définie sur I et converge vers ℓ, si f est continue en ℓ et donc si $u_n \to \ell$, on a $f(u_n) \to f(\ell)$.
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}$, donc $f(\ell) = \ell$.

1.6) Opérations sur les fonctions continues

Les théorèmes sur les limites permettent d'affirmer les résultats suivants :
Si f et g sont deux fonctions continues en a, définies sur un même intervalle I et si λ est un nombre réel quelconque :

→ $f + g$ *est continue en* a

→ λf *est continue en* a

→ fg *est continue en* a

→ Si $\forall x \in I, g(x) \neq 0$, *alors* (f/g) *est continue en* a.

Les fonctions usuelles, leur somme, leur produit, leur combinaison linéaire, ou même leur rapport en des points où le dénominateur ne s'annule pas sont continues en chaque point de leur ensemble de définition commun.
De la même façon, on a

THEOREME

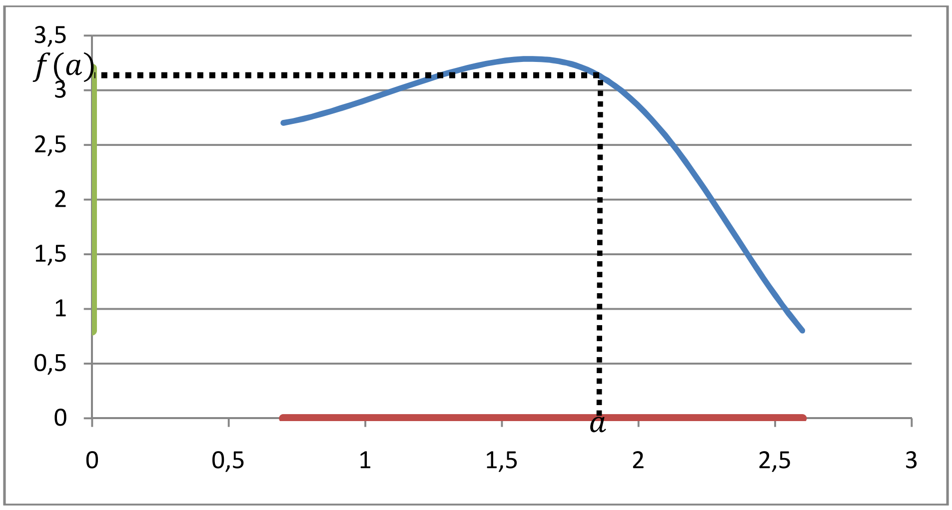
Si f est continue en a et si g est continue en $f(a)$ alors $g \circ f$ est continue en a.

Par exemple $x \mapsto \ln(x^2 + 1)$ est continue en tout $a \in \mathbb{R}$.

1.7) Le théorème des valeurs intermédiaires

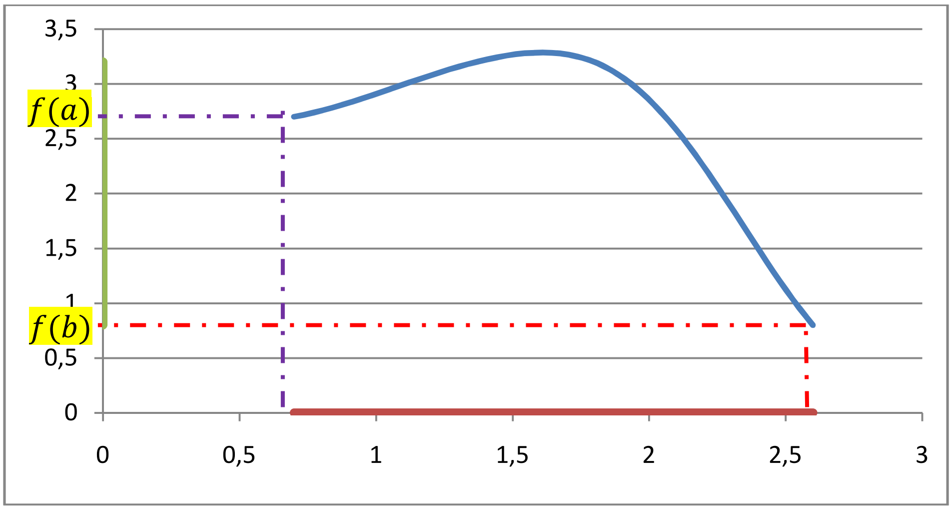
THEOREME

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I. Soit $J = f(I)$. Alors J est un intervalle.



Ce qui signifie que pour tout point a de l'intervalle I (dans le dessin ci-dessus, cet intervalle est représenté en rouge), $f(a)$ appartient à l'intervalle $J = f(I)$ (représenté en bleu sur le dessin).

Réciproquement si l'on prend une valeur λ dans l'intervalle J, alors ce λ est image d'un point au moins de I.
Tout élément de I a une image (unique) dans J et tout élément de J a <u>au moins</u> un antécédent dans I.
Si l'on se place dans le cas où I est un intervalle fermé $[a, b]$, alors $f(I)$ est un intervalle J qui contient $f(a)$ et $f(b)$ et qui contient donc également tous les points de l'intervalle $[f(a), f(b)]$.



Ce qui donne une deuxième version du théorème :

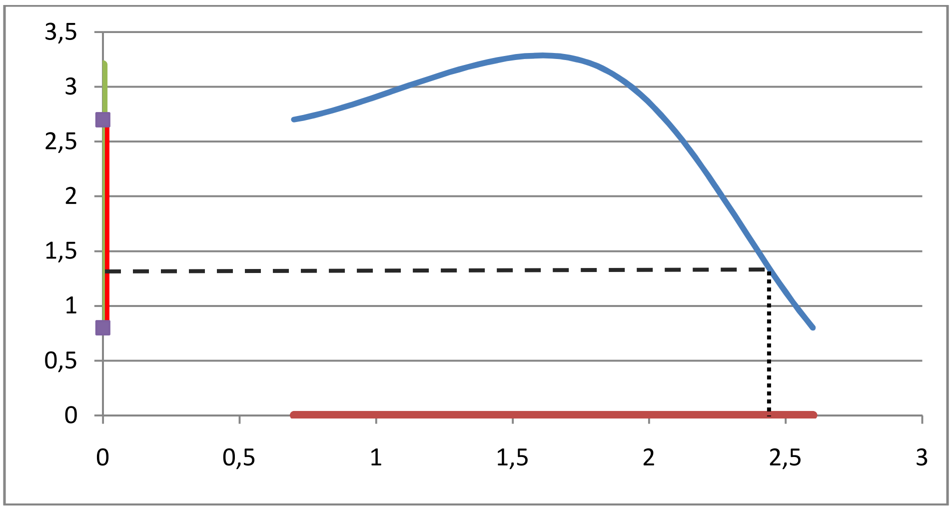
THEOREME

Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, alors quel que soit le réel λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c de l'intervalle $[a, b]$ tel que $f(c) = \lambda$
*(c'est de cette forme que l'on tire le nom du théorème : toutes **les valeurs intermédiaires** entre $f(a)$ et $f(b)$ sont atteintes par f)*

En effet si λ est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors il appartient à J et donc il est l'image d'au moins un réel c de l'intervalle $[a, b]$.
Une autre forme du théorème généralise cette dernière écriture :

THEOREME

Si f est une fonction continue sur un intervalle I et si a et b sont deux réels inclus dans I alors pour tout réel λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c de l'intervalle $[a, b]$ tel que $f(c) = \lambda$.



Cette version est plus forte que la précédente, mais elle n'en est qu'une conséquence : il suffit d'appliquer le théorème précédent à la restriction de f à l'intervalle $[a, b]$.

Attention : une erreur commune consiste à inverser le théorème.
Comme on le voit bien sur les graphiques précédents, il n'est pas nécessairement vrai que si l'on prend un réel x entre a et b, son image sera entre $f(a)$ et $f(b)$. Ce qui est vrai, c'est que si l'on prend un nombre λ entre $f(a)$ et $f(b)$ alors il existe au moins un nombre réel c de l'intervalle $[a, b]$ dont l'image $f(c)$ est égale à λ.

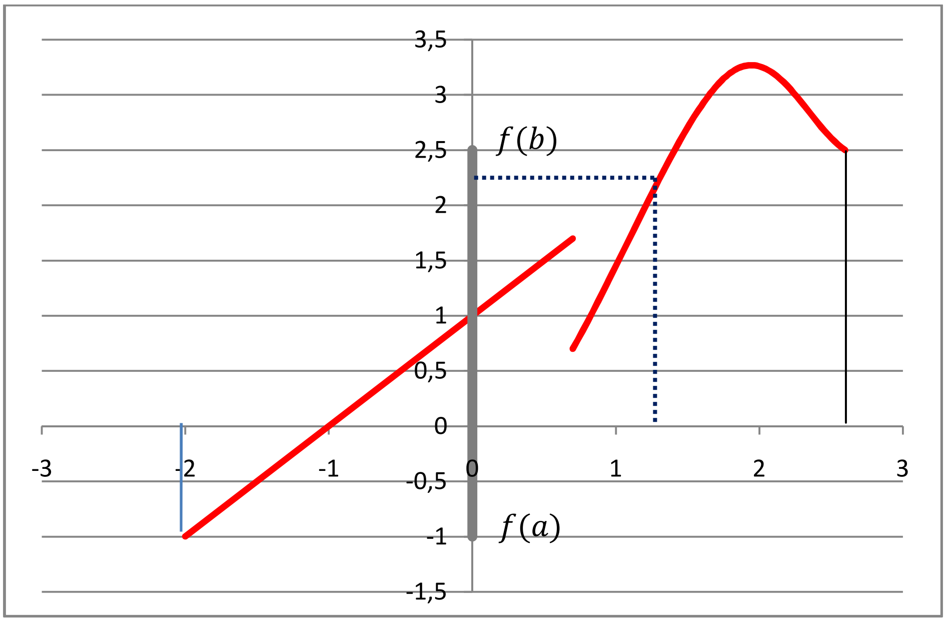
En terme d'équation, le théorème des valeurs intermédiaires garantit que si f est continue sur $[a, b]$, et si λ est un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors l'équation $f(x)=\lambda$ a au moins une solution comprise entre a et b.
Ce que l'on peut exprimer en disant que f réalise une surjection de $[a, b]$ sur $[f(a), f(b)]$.

Un cas particulier important :
Si f est continue sur $[a, b]$ et si f change de signe sur $[a, b]$, alors il existe au moins un réel c de $[a, b]$ tel que $f(c)=0$.

En effet si f est continue sur $[a, b]$, l'image de $[a, b]$ est un intervalle J. Si f change de signe sur $[a, b]$, cela signifie qu'il existe au moins un nombre α et un nombre β de l'intervalle $[a, b]$, tels que $f(\alpha) < 0$ et $f(\beta) > 0$.

Donc 0 est un réel compris entre $f(\alpha)$ et $f(\beta)$, et donc d'après la dernière version que nous avons donnée du théorème il existe un nombre réel c compris entre α et β dont l'image sera 0. Comme $\alpha \in [a, b]$ et $\beta \in [a, b]$ et comme c est compris entre α et β, alors $c \in [a, b]$ et $f(c) = 0$.

Remarque :
Le théorème des valeurs intermédiaires ne caractérise pas les fonctions continues comme le montre le graphique ci-dessous :



Une conséquence importante du théorème des valeurs intermédiaires :

THEOREME *Tout polynôme de degré impair admet au moins une racine*

Une fonction polynôme est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ comme combinaison linéaire de fonctions continues.
S'il est de degré impair ses limites en +∞ et en -∞ sont de signe contraire, donc le polynôme change au moins une fois de signe et donc il existe au moins un réel qui l'annule.

1.8) Fonction continue sur un segment

Si f est une fonction continue sur un intervalle I, l'image de I par f est un intervalle J.
Nous ajouterons sans démonstration que si I est un intervalle fermé, J sera également un intervalle fermé.
Dans ce cas, nous obtenons des renseignements supplémentaires sur la fonction.
Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, alors l'image de cet intervalle est un intervalle fermé. Il existe donc deux nombres réels m et M tels que $J = [m, M]$.
D'après ce que nous avons vu, cela signifie que

$$\forall x \in [a, b], f(x) \in [m, M] \text{ donc } m \leq f(x) \leq M$$

Première conclusion : toute fonction continue sur un intervalle fermé est bornée.

D'autre part, $m \in [m, M]$, donc comme m est un élément de J nous savons qu'il existe un réel c de $[a, b]$ tel que $f(c) = m$.
On montre de même qu'il existe un réel d de $[a, b]$ tel que $f(d) = M$.
Deuxième conclusion : la fonction atteint ses bornes.
On a alors le théorème suivant :

THEOREME	*Toute fonction continue sur un intervalle fermé est bornée et atteint ses bornes.*

1.9) Continuité et bijectivité

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soit J l'image de I.
Soit λ un réel de J. Nous savons d'après le théorème des valeurs intermédiaires, qu'il existe au moins un réel c dont l'image par f est λ.

Supposons de plus que f est strictement monotone (par exemple strictement croissante) et supposons qu'il existe deux réels c_1 et c_2 dont l'image par f est λ.
Si ces deux réels sont distincts, on désignera par c_1 le plus petit des deux. On aura donc $c_1 < c_2$. Donc $f(c_1) < f(c_2)$.
Il n'est donc pas possible que $f(c_1)$ et $f(c_2)$ soient égaux simultanément à λ.
Si f est strictement monotone tout réel λ de J a un antécédent et un seul dans I, ce qui signifie que f réalise une bijection de I sur J.

THEOREME	*Soit f une fonction continue sur un intervalle I et J l'intervalle image.* *Si f est strictement monotone sur I alors f réalise une bijection de I sur J.*

La réciproque est vraie.

THEOREME	*Soit f une fonction continue sur un intervalle I et J l'intervalle image.* *Si f réalise une bijection de I sur J alors f est strictement monotone sur I*

Il suffit de montrer que si f n'est pas strictement monotone alors elle n'est pas bijective.

Dire que f n'est pas strictement monotone (prenons ici croissante), c'est dire qu'il existe au moins trois nombres réels de l'intervalle I tels que l'on ait par exemple

$$a < b < c$$

et

$$f(a) \leq f(b) \text{ et } f(b) \geq f(c)$$

Posons

$$m = \max(f(a), f(c))$$

Pour simplifier considérons que $m = f(a)$.
$m \in [f(a), f(b)]$, et l'on sait que $f(a) = m$
$f(c) \leq m \leq f(b)$ donc $m \in [f(c), f(b)]$, donc il existe un élément c_2 de l'intervalle $[b, c]$ tel que $f(c_2) = m$
Comme $a \notin [b, c]$, on sait que $c_2 \neq a$.
m aura donc au moins deux antécédents sur I. f n'est donc pas une bijection.

1.10) Fonction réciproque

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et J l'image de I. Si f est strictement monotone sur I, alors f réalise une bijection de I sur J.
Elle admet donc une bijection réciproque de J sur I.
On démontre et nous admettrons que cette bijection réciproque est aussi continue.

Nous savons que pour tout x de I, on aura $f^{-1}(f(x)) = x$ et pour tout y de J, $f(f^{-1}(y)) = y$
Supposons que f soit strictement croissante. Nous savons que f^{-1} est continue et bijective. Elle est donc strictement monotone. Elle est donc strictement croissante ou strictement décroissante.
Soit α et β deux éléments de J.
Considérons que $\alpha < \beta$ alors soit $f^{-1}(\alpha) < f^{-1}(\beta)$ soit $f^{-1}(\alpha) > f^{-1}(\beta)$
Si $f^{-1}(\alpha) < f^{-1}(\beta)$, on aura par composition par f qui est strictement croissante :

$$f(f^{-1}(\alpha)) < f(f^{-1}(\beta)) \text{ et donc } \alpha < \beta$$

Si $f^{-1}(\alpha) > f^{-1}(\beta)$, on aura par composition par f qui est strictement croissante :

$$f(f^{-1}(\alpha)) > f(f^{-1}(\beta)) \text{ et donc } \alpha > \beta$$

La deuxième hypothèse conduit à une contradiction, donc on ne peut retenir que la première et donc f^{-1} est une fonction strictement croissante.
On ferait un raisonnement identique avec une fonction strictement décroissante.
On a donc le théorème suivant

THEOREME	*Soit f une fonction continue sur un intervalle I et J l'intervalle image de I par f.* *Si f est strictement monotone sur I, elle admet une bijection réciproque f^{-1} de J sur I, qui est continue et dont le sens de variation est le même que celui de f.*

II) Dérivabilité

2.1) Introduction

Considérons une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit a un nombre réel appartenant à l'ensemble de définition de f et b son image par f.
Une question que l'on peut se poser est la suivante : comment varie b quand on fait varier « un petit peu » a ?
Nous allons voir que cela dépend de a et de la fonction f.

Prenons par exemple les deux fonctions suivantes : $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto x^3$ pour $a = 2$.
Considérons un petit intervalle autour de 2 (par exemple $[1{,}9; 2{,}1]$) et regardons dans quel intervalle on trouve b.
Si $1{,}9 \leq x \leq 2{,}1$ alors $\sqrt{1{,}9} \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{2{,}1}$ soit environ

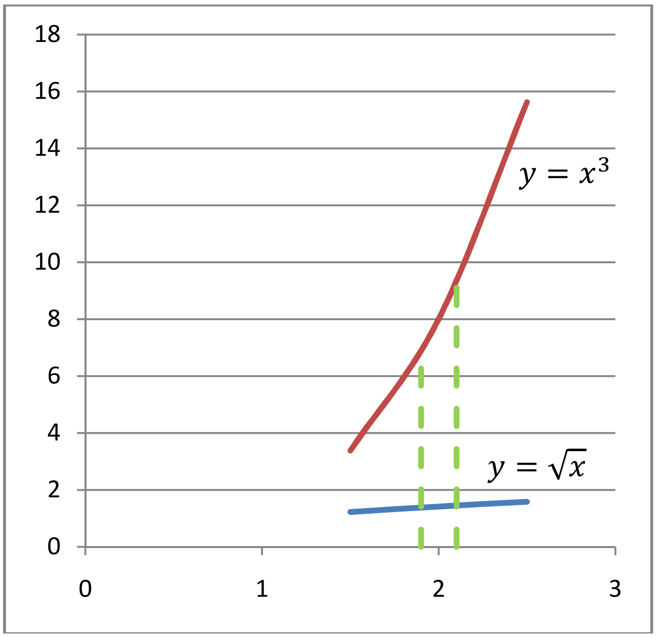
$$1{,}37 \leq \sqrt{x} \leq 1{,}45$$

De la même façon $1{,}9^3 \leq x^3 \leq 2{,}1^3$

$$6{,}85 \leq x^3 \leq 9{,}27$$

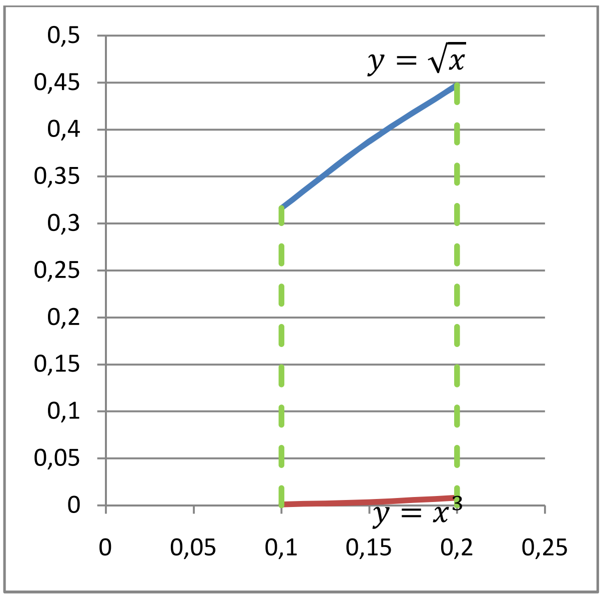
L'erreur commise en remplaçant 2 par 1,9 ou par 2,1 a beaucoup plus de conséquences pour la fonction cube que pour la fonction carré.

Comment cela se traduit-il graphiquement ?



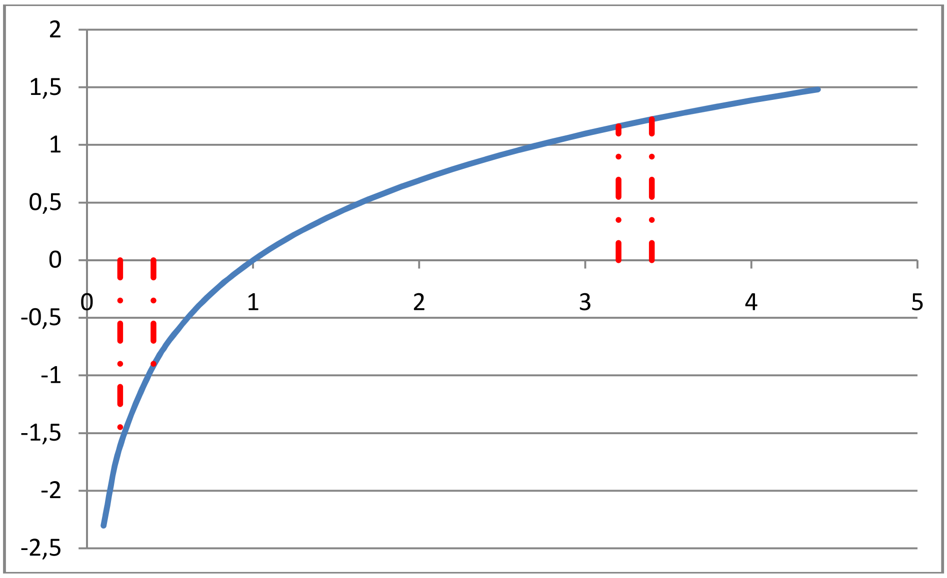
La représentation graphique montre bien pourquoi on constate cette différence ; la fonction $x \mapsto x^3$ croît beaucoup plus vite entre 1,9 et 2,1 que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$.
Mais ce serait tout à fait différent si l'on se plaçait entre 0,1 et 0,2.
On aurait

$0{,}31 \leq \sqrt{x} \leq 0{,}46$
$0{,}001 \leq x^3 \leq 0{,}008$



Cette fois-ci, c'est la fonction racine qui croît beaucoup plus vite que la fonction cube.

La croissance (ou la décroissance) d'une même fonction est différente suivant l'intervalle sur lequel on l'examine.
Considérons par exemple la fonction ln.



La fonction ln est croissante, mais sa croissance est plus rapide sur l'intervalle $[0{,}2; 0{,}4]$ que sur l'intervalle $[3{,}2; 3{,}4]$.

Il est donc nécessaire de disposer d'un outil permettant de comparer les croissances (ou décroissances) de deux fonctions sur un même intervalle, ou d'une même fonction sur des intervalles différents.

2.2) Taux d'accroissement

L'outil de comparaison est le taux d'accroissement.
Le taux d'accroissement d'une fonction f entre deux nombres a et b est égal à

$$t_{a,b} = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$$

Calculons ces taux pour les fonctions racine carrée et cube sur l'intervalle [0,1 ;0,2].
Pour la racine carrée, on a :

$$t_{0,1;0,2} = \frac{\sqrt{0{,}1} - \sqrt{0{,}2}}{0{,}1 - 0{,}2} \approx 1{,}31$$

Pour la fonction cube, on a :

$$t'_{0,1;0,2} = \frac{0{,}1^3 - 0{,}2^3}{0{,}1 - 0{,}2} \approx 0{,}07$$

Sur l'intervalle $[0{,}1; 0{,}2]$, le taux d'accroissement de la racine carrée est supérieur à celui du cube. Ce qui confirme le graphique.
De la même façon avec les mêmes notations, on a

$$t_{1,9;2,1} = \frac{\sqrt{1{,}9} - \sqrt{2{,}1}}{1{,}9 - 2{,}1} \approx 0{,}35$$

$$t'_{1,9;2,1} = \frac{1{,}9^3 - 2{,}1^3}{1{,}9 - 2{,}1} \approx 12{,}01$$

Enfin pour la fonction ln, on a

$$t_{0,2;0,4} = \frac{\ln(0,2) - \ln(0,4)}{0,2 - 0,4} \approx 3,47$$
$$t_{3,2;3,4} = \frac{\ln(3,2) - \ln(3,4)}{3,2 - 3,4} \approx 0,31$$

Le taux d'accroissement est lié à l'intensité de la variation de la fonction.

2.3) Nombre dérivé

DEFINITION

Soit une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a un point de I

Dire que ***f est dérivable*** *en a signifie que la limite du quotient $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie. On appelle* ***nombre dérivé*** *de f en a cette limite.*

On note :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

On dit aussi que $f'(a)$ est la dérivée de f au point a.

En pratique, on pose souvent $x - a = h$. Quand x tend vers , h tend vers 0.
On a alors :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Et donc

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Le nombre dérivé apparaît donc comme la limite du taux de variation de f quand x tend vers a.

Exemples

Considérons la fonction $f: x \mapsto x^2$. Et soit a un nombre réel quelconque. Montrons que la fonction f est dérivable en a.
On calcule d'abord le taux de variation :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x^2 - a^2}{x - a} = x + a$$

On a

$$\lim_{x \to a} x + a = 2a$$

Donc la fonction f est dérivable pour tout a et l'on a

$$f'(a) = 2a$$

Considérons maintenant la fonction $g: x \mapsto x^3$ et a un nombre réel quelconque.
On a

$$\begin{aligned}\frac{g(a + h) - g(a)}{h} &= \frac{(a + h)^3 - a^3}{h} \\ &= \frac{a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3 - a^3}{h} \\ &= \frac{3a^2h + 3ah^2 + h^3}{h} \\ &= 3a^2 + 3ah + h^2\end{aligned}$$

On a

$$\lim_{h \to 0} 3a^2 + 3ah + h^2 = 3a^2$$

Donc la fonction g est dérivable pour tout réel a et l'on a
$$g'(a) = 3a^2$$

Considérons enfin la fonction $k : x \mapsto \sqrt{x}$ et a un nombre positif.
On doit calculer
$$\frac{k(a+h) - k(a)}{h} = \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h}$$
On aboutit (logiquement) à une forme indéterminée.
Pour lever l'indétermination, on passe à la quantité conjuguée.
On a:
$$\frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} = \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} \times \frac{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}} = \frac{a+h-a}{h\left(\sqrt{a+h} + \sqrt{a}\right)} = \frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}$$
On a donc :
$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}} \text{ si } a \neq 0$$
Pour $a = 0$, il n'y a pas de limite.
La fonction racine carrée est dérivable pour tout nombre a strictement positif et l'on a
$$k'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$
Elle n'est pas dérivable en 0.

2.4) Développement limité d'ordre 1

Dire que f est dérivable en a c'est dire que la quantité $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ tend vers une limite finie $f\ '(a)$ quand x tend vers a.
Cela revient à dire que la quantité $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a)$ tend vers 0 quand h tend vers 0.
Posons
$$\varepsilon(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f\ '(a)$$
On a donc
$$\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$$
On a
$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f\ '(a) + \varepsilon(h)$$
Donc
$$f(a+h) - f(a) = hf\ '(a) + h\varepsilon(h)$$
Et donc
$$f(a+h) = f(a) + hf\ '(a) + h\varepsilon(h)$$

L'égalité $f(a+h) = f(a) + hf\ '(a) + h\varepsilon(h)$ s'appelle **développement limité d'ordre 1** de f au voisinage de a
On dit que $f(a) + hf\ '(a)$ est **une approximation affine** de $f(a+h)$.
Réciproquement, supposons qu'il existe un nombre réel ℓ et une fonction ε telle que $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$, et tels que
$$f(a+h) = f(a) + h\ell + h\varepsilon(h)$$
alors
$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \ell + \varepsilon(h)$$

Et donc

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\ell$$

Donc f est dérivable en a et l'on a

$$f'(a)=\ell$$

THEOREME

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a un point de I.

f est dérivable en a si et seulement si il existe un nombre réel ℓ et une fonction ε tels que

$$f(a+h)=f(a)+\ell h+h\varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$$

On a alors

$$f'(a)=\ell$$

2.5) Fonction dérivée

DEFINITION

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Si $\forall x\in I, f'(x)$ existe, on appelle fonction dérivée de f la fonction noté f' définie par

$$f':x\mapsto f'(x)$$

Notation différentielle :

Pour rappeler l'origine du calcul de f', on note souvent cette fonction sous la forme $\dfrac{df}{dx}$.

Remarque :
L'ensemble de définition de la fonction dérivée est nécessairement inclus dans l'ensemble de définition de la fonction.

2.6) Dérivée à droite, dérivée à gauche

Il arrive que la limite de la quantité $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ change suivant que x tend vers a par valeurs inférieures à a ou par valeurs supérieures à a.
Il se peut même qu'une de ces deux limites seulement existe.
On parle alors de dérivée à gauche et de dérivée à droite.
Sous réserve d'existence, on a :

$$f_g'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \text{ et } f_d'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Si la fonction f est définie à droite et à gauche de a, on dit qu'elle est dérivable en a si elle est dérivable à droite et à gauche et si

$$f_g'(a)=f_d'(a)$$

Par exemple la fonction $f:x\mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0, mais est dérivable à droite et à gauche en 0.
On a en effet

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{|x|}{x}$$

Si $x < 0$, on a $\frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1$, donc

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1 = f_g{}'(0)$$

On a de même pour $x > 0$, $\frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1$, donc

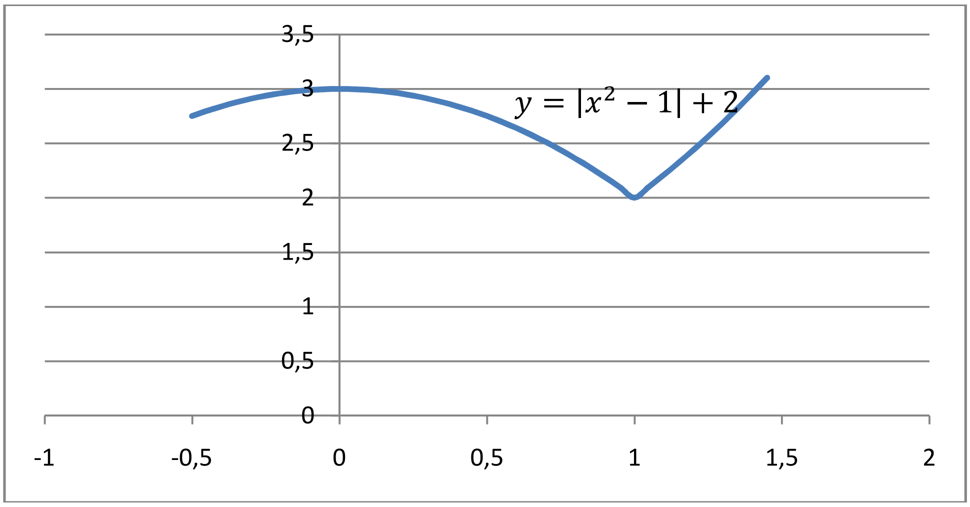
$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1 = f_d{}'(0)$$

2.7) Interprétation géométrique

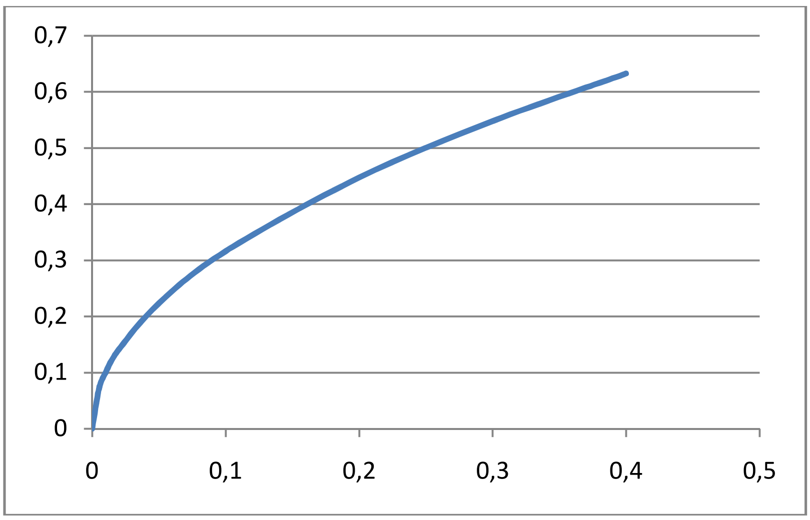
Nous avons vu en terminale que le nombre dérivée permet de trouver l'équation de la tangente en en point d'abscisse a de la courbe représentative :
La tangente au point de coordonnées $(a, f(a))$ est la droite passant par ce point et de coefficient directeur $f\,'(a)$.
Son équation est donc

$$y = f\,'(a)(x - a) + f(a)$$

Si la fonction n'est pas dérivable en a, mais est dérivable à droite et/ou à gauche, on des demi-tangentes.
Quand il y a deux demi-tangentes, on dit que le point est anguleux.



Si la limite du taux de variation tend vers l'infini, on dit que l'on a une demi-tangente verticale.
Le cas typique est celui de la racine carrée dont nous avons vu qu'elle n'est pas dérivable en 0.



III) Propriétés de la dérivation

3.1) Dérivabilité et continuité

THEOREME

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un point de I. Si f est dérivable en a, f est continue en a.

Démonstration :
Si f est dérivable en a, il existe un nombre noté $f'(a)$ et une fonction ε telle que $\lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$ et
$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varepsilon(h)$$
Posons $x = a + h$, on a
$$f(a) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)\varepsilon(x-a)$$
On a
$$\lim_{x\to a}(x-a)f'(a) = 0$$
Et
$$\lim_{x\to a}\varepsilon(x-a) = \lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$$
Donc
$$\lim_{x\to a}(x-a)\varepsilon(x-a) = 0$$
Donc
$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$
Ce qui prouve la continuité.
La réciproque est fausse comme le prouve par exemple les fonctions racine carrée et valeur absolue en 0.

3.2) Opérations sur les dérivées

THEOREMES

Soit f et g deux fonctions définies sur un même intervalle I et dérivables en un point a de I. Soit λ un nombre réel quelconque, alors :

→ $f+g$ *est dérivable en a et*
$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$
→ λf *est dérivable en a et*
$$(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$$
→ fg *est dérivable en a et*
$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$
→ si g *ne s'annule pas en a, f/g est dérivable en a et l'on a*
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$$
→ $\forall n \in \mathbb{N}^*, f^n$ *est dérivable en a et l'on a*
$$(f^n)'(a) = nf'(a)f(a)^{n-1}$$

Démonstration :
→ Pour la somme : f est dérivable en a donc $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$, de même g est dérivable en a donc $\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a} = g'(a)$.
On a

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(a)}{x-a}=\frac{f(x)+g(x)-f(a)-g(a)}{x-a}$$
$$=\frac{f(x)-f(a)+g(x)-g(a)}{x-a}$$
$$=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}+\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$

Donc d'après les théorèmes sur les limites :

$$\lim_{x\to a}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}+\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=f'(a)+g'(a)$$

→ Pour le produit, on utilise une astuce. On écrit

$$\frac{(fg)(x)-(fg)(a)}{(x-a)}=\frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a}$$
$$=\frac{f(x)g(x)-f(a)g(x)+f(a)g(x)-f(a)g(a)}{x-a}$$
$$=\frac{f(x)g(x)-f(a)g(x)}{x-a}+\frac{f(a)g(x)-f(a)g(a)}{x-a}$$
$$=g(x)\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)+f(a)\left(\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right)$$

On passe à la limite

$$\lim_{x\to a}\frac{(fg)(x)-(fg)(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}g(x)\frac{f(x)-f(a)}{x-a}+\lim_{x\to a}f(a)\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$
$$=g(a)f'(a)+f(a)g'(a)$$

(car la fonction g qui est dérivable en a est donc continue en a).

→ Pour le rapport, on commence par démontrer que

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a)=-\frac{g'(a)}{g(a)^2}$$

Pour cela, on écrit que :

$$\frac{\left(\frac{1}{g}\right)(x)-\left(\frac{1}{g}\right)(a)}{x-a}=\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{g(a)}}{x-a}=\frac{g(a)-g(x)}{g(a)g(x)}\times\frac{1}{x-a}=-\frac{1}{g(a)g(x)}\times\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$

D'où

$$\lim_{x\to a}\frac{\left(\frac{1}{g}\right)(x)-\left(\frac{1}{g}\right)(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{1}{g(a)g(x)}\times\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=-\frac{1}{g(a)g(a)}g'(a)=-\frac{g'(a)}{g(a)^2}$$

Ensuite on écrit que

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a)=\left(f\times\frac{1}{g}\right)'(a)=f'(a)\times\left(\frac{1}{g}\right)(a)+f(a)\times\left(\frac{1}{g}\right)'(a)$$
$$=f'(a)\times\frac{1}{g(a)}+f(a)\times\left(-\frac{g'(a)}{g(a)^2}\right)$$
$$=\frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g(a)^2}$$

3.3) Dérivée des fonctions composées

THEOREME

Soit f une fonction d'un intervalle I dans un intervalle J et g une fonction de l'intervalle J dans un intervalle K.
Soit a un élément de I et $b = f(a)$.
Si $f'(a)$ et $g'(b)$ existent, alors la fonction $g \circ f$ est dérivable en a et l'on a :

$$(g \circ f)'(a) = f'(a) \times g'(b) = f'(a) \times g'(f(a))$$

Résultat admis.

Exemple :
La fonction $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de même que la fonction $x \mapsto x^2 + 1$, donc la fonction $x \mapsto e^{x^2+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on a

$$(e^{x^2+1})' = 2xe^{x^2+1}$$

Autre exemple sur $]0,+\infty[$, on a

$$x^{x^2} = e^{x^2 ln(x)}$$

Donc la fonction $x \mapsto x^{x^2}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et l'on a :

$$\left(x^{x^2}\right)' = \left(x^2\ln(x)\right)' e^{x^2\ln(x)} = \left(2x\ln(x) + x^2 \times \frac{1}{x}\right) e^{x^2\ln(x)} = (2x\ln(x) + x)e^{x^2\ln(x)}$$

3.4) Dérivée d'une bijection réciproque

THEOREME

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soit J l'intervalle image.
Si f est bijective alors il existe une bijection réciproque f^{-1} de J sur I.
Soit a un point de I tel que $f'(a)$ existe et n'est pas égal à 0.
Soit $b = f(a)$.
Alors la fonction f^{-1} est dérivable en b et l'on a

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

Démonstration :
On a en posant $x = f^{-1}(y)$ ce qui revient à écrire $y = f(x)$

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{x - a}{f(x) - f(a)}$$

Quand y tend vers b, alors $f^{-1}(y)$ tend vers $f^{-1}(b)$ par continuité de f^{-1} et donc x tend vers a.
Donc

$$\lim_{y \to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \lim_{x \to a} \frac{x - a}{f(x) - f(a)} = \lim_{x \to a} \frac{1}{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}} = \frac{1}{f'(a)}$$

Par exemple, la fonction $x \mapsto x^2$ réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$. Sa fonction réciproque est la fonction racine carrée.
On a pour tout $x \geq 0$,

$$y = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{y}$$

On aura

$$(\sqrt{y})' = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

3-5) Signe de la dérivée et variations des fonctions

Le théorème suivant relie le signe de la dérivée et le sens de variation d'une fonction.

THEOREME

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.
(1) f est croissante sur $[a,b]$ si et seulement si $\forall x \in]a,b[, f'(x) \geq 0$
(2) f est décroissante sur $[a,b]$ si et seulement si $\forall x \in]a,b[, f'(x) \leq 0$
(3) f est constante sur $[a,b]$ si et seulement si $\forall x \in]a,b[, f'(x) = 0$
(4) Soit $c \in]a,b[$. Si f présente un extremum local en c, alors $f'(c) = 0$

Tous ces résultats proviennent du théorème des accroissements finis.

3-6) Dérivées d'ordre supérieur

DEFINITION

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Si f est dérivable et que f' est dérivable, on note f'' ou parfois $f^{(2)}$ la dérivée de f'.
On a donc $f'' = (f')'$
f'' s'appelle la fonction dérivée seconde.
Si f est $(n-1)$ fois dérivable, on note $f^{(n-1)}$ sa dérivée $(n-1)$-ieme.
Si cette fonction est également dérivable, on note $f^{(n)}$ sa dérivée. On a donc $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.
On dit que $f^{(n)}$ est la dérivée n-ieme de f.

Remarque : par convention $f^{(0)} = f$

3-7) Fonction de classe C^n, fonction de classe C^∞

DEFINITION

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
On dit que f est de classe C^n sur I pour signifier que sa dérivée n-ieme existe et est continue sur I
On dit que f est de classe C^∞ sur I pour signifier que sa dérivée n-ieme existe quel que soit l'entier n.

Une fonction de classe C^1 est une fonction continue, dérivable et à dérivée continue.
Une fonction de classe C^2 est une fonction deux fois dérivables et dont la dérivée seconde est continue.
Les fonctions polynômes, les fractions rationnelles sur leur ensemble de définition, l'exponentielle et le logarithme népérien sont des fonctions de classe C^∞.
Une fonction continue est de classe C^0. Une fonction continue et dérivable, mais dont la dérivée n'est pas continue est de classe D^1.

Pour tout entier n ou pour ∞, l'ensemble des fonctions de classe C^n (ou C^∞) est stable pour les opérations habituelles (addition, multiplication, puissance, division, composition).

3-8) Limite de la fonction dérivée. Prolongement

Le théorème suivant est admis. Il est très intéressant dans de nombreuses situations comme celle décrite ci-dessous.
Il arrive souvent que l'on étudie une fonction définie sur un intervalle et prolongée en un point a comme par exemple $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
La continuité est en général assurée par le choix du prolongement mais cela ne dit pas si la fonction est dérivable au point où elle a été prolongée.
La méthode usuelle consiste alors à déterminer la limite du rapport $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ quand x tend vers a.
Le théorème que nous allons donner évite de passer par ce calcul :

THEOREME

On considère une fonction f continue sur un intervalle $[a, b]$ et de classe C^1 sur $[a, b[$.
Si $\lim\limits_{x \to b} f'(x) = \ell$ (limite finie) alors on peut prolonger f' par continuité à gauche en posant $f_g'(b) = \ell$.
*Si $\lim\limits_{x \to b} f'(x) = \pm\infty$ alors f n'est pas dérivable à gauche en b. **
La courbe représentative admet une demi-tangente verticale au point de coordonnées $(b, f(b))$
Si $\lim\limits_{x \to b} f'(x)$ n'existe pas, on ne peut rien conclure.

Par exemple,

$$\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)' = \left(\frac{(x-1)e^x + 1}{x^2}\right)$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{(x-1)e^x + 1}{x^2} = \frac{1}{2}$$

On peut prolonger la fonction f en une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ en posant $f'(0) = 1/2$

3-9) La formule de Leibniz

THEOREME

Soit f et g deux fonctions n fois dérivables sur un intervalle I. Alors le produit fg est n fois dérivable sur I et

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

La démonstration de la formule est très proche de celle faite pour le binôme de Newton.
Nous avons posé par convention que $f^{(0)} = f$.
Donc

$$(fg)^{(0)} = fg$$

D'autre part

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} f^{(k)} g^{(0-k)} = f^{(0)} g^{(0)} = fg$$

La formule est initialisée.

$\forall n \geq 0$, montrons que si $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$ alors $(fg)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}$

On a

$$(fg)^{(n+1)} = \left((fg)^{(n)}\right)'$$

La dérivée d'une somme est la somme des dérivées, donc en utilisant l'hypothèse de récurrence, on a :

$$\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k)} g^{(n-k)}\right)' \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\left(f^{(k)}\right)' g^{(n-k)} + f^{(k)} \left(g^{(n-k)}\right)'\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n+1-k)}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}
\end{aligned}$$

On va procéder à un changement de variable dans la première somme pour ne plus avoir le terme en $k+1$. On pose $j = k+1$. On obtient

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} = \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} f^{(j)} g^{(n-(j-1))}$$
$$=$$

Si l'on revient à la lettre k, on a donc

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n+1-k)}$$

On a donc

$$(fg)^{(n+1)} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}$$

On veut « réunir » les deux sommes. Pour cela on écarte les « termes en trop » dans chacune d'elles :

$$(fg)^{(n+1)} = \binom{n}{n+1-1} f^{(n+1)} g^{(n+1-(n+1))} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \binom{n}{0} f^{(0)} g^{(n+1-0)}$$

Ce qui donne donc

$$\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)} &= f^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + g^{(n+1)} \\
&= f^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) f^{(k)} g^{(n+1-k)} + g^{(n+1)}
\end{aligned}$$

D'après la formule de Pascal, on a

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

Donc

$$(fg)^{(n+1)} = f^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + g^{(n+1)}$$

Or

$$f^{(n+1)} = \binom{n+1}{n+1} f^{(n+1)} g^{(n+1-(n+1))}$$

Et

$$g^{(n+1)} = \binom{n+1}{0} f^{(0)} g^{(n+1-0)}$$

Donc

$$(fg)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}$$

Il y a donc hérédité et la formule est donc démontrée.

IV) Fonctions convexes

4-1) Fonctions convexes, fonctions concaves

DEFINITION

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est convexe sur I si :

$$\forall (x,y) \in I^2, \forall t \in [0,1], f(tx+(1-t)y) \leq tf(x)+(1-t)f(y)$$

On dit qu'une fonction f est concave si la fonction $-f$ est convexe.

Que signifie la définition ?
Si nous prenons par exemple $x \leq y$, on peut remarquer que

$$x \leq tx + (1-t)y \leq y$$

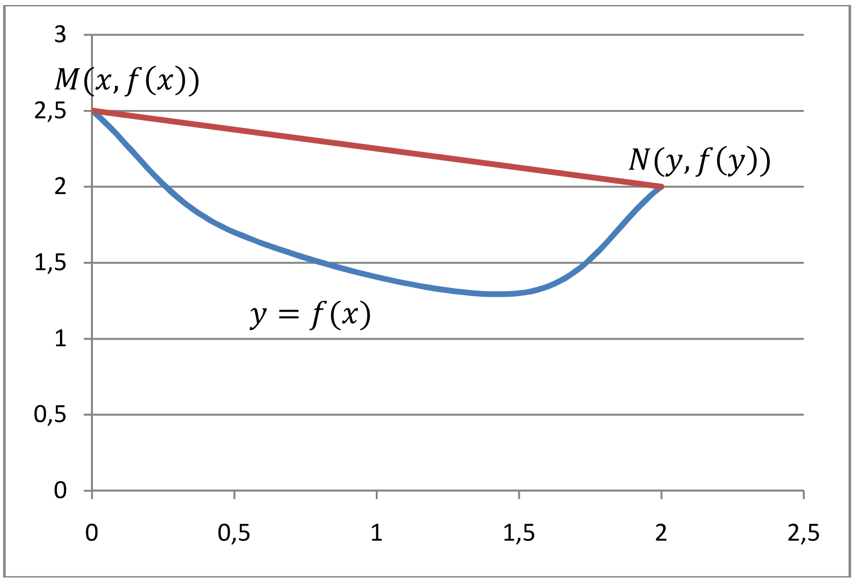
En effet

$$tx + (1-t)y - x = (1-t)y - (1-t)x = (1-t)(y-x) \geq 0$$

Et

$$tx + (1-t)y - y = tx - ty = t(x-y) \leq 0$$

On a donc pour tout $t \in [0,1], tx + (1-t)y \in [x,y]$
On dit que $a = tx + (1-t)y$ est un point du segment $[x,y]$.
De la même façon, $tf(x) + (1-t)f(y)$ est un point du segment $[f(x), f(y)]$ ou du segment $[f(y), f(x)]$
L'image d'un point du segment $[x,y]$ est donc au-dessous du point correspondant sur le segment $[f(x), f(y)]$ ou le segment $[f(y), f(x)]$.
Ce qui signifie que le segment reliant les points de coordonnées $M(x, f(x))$ et $N(y, f(y))$ est au-dessus de la courbe...



Généralisation :
On démontre par récurrence sur le théorème suivant :

THEOREME

La fonction f est convexe sur un intervalle I si et seulement si pour tout entier n supérieur ou égal à 2, si $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est une famille de points de I et si $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ est une famille de réels positifs tels que $t_1 + t_2 + \dots + t_n = 1$ (ce qui suppose implicitement que ces réels sont compris entre 0 et 1).
alors on a

$$f(t_1x_1 + \cdots + t_nx_n) \leq t_1f(x_1) + \cdots + t_nf(x_n)$$

Cette inégalité est connue sous le nom d'**inégalité de Jensen**

Démonstration
Pour $n = 2$, on considère x_1 et x_2 dans I, et t_1 et t_2 deux réels positifs tels que $t_1 + t_2 = 1$.
On a

$$f(t_1x_1 + t_2x_2) = f(tx_1 + (1 - t_1)x_2) \leq t_1f(x_1) + (1 - t_1)f(x_2) \text{ par convexité}$$

Et donc

$$f(t_1x_1 + t_2x_2) \leq t_1f(x_1) + t_2f(x_2)$$

La propriété est vérifiée pour $n = 2$
Considérons que la propriété est vérifiée pour un certain entier n, et montrons alors qu'elle est vraie pour $(n + 1)$.
On considère une famille de points de I : $(x_1, \dots, x_{n+1})$ et une famille de réels positifs $(t_1, \dots, t_{n+1})$ tels que

$$t_1 + \cdots + t_{n+1} = 1$$

Posons

$$x = t_1x_1 + \cdots + t_nx_n + t_{n+1}x_{n+1}$$

On peut considérer que $t_{n+1} \neq 1$ sinon on est dans un cas trivial.
On a

$$x = t_{n+1}x_{n+1} + (1 - t_{n+1}) \sum_{k=1}^{n} \frac{t_k}{1 - t_{n+1}} x_k$$

On a donc

$$f(x) = f\left(t_{n+1}x_{n+1} + (1 - t_{n+1}) \sum_{k=1}^{n} \frac{t_k}{1 - t_{n+1}} x_k\right)$$

Par convexité, on a :

$$f\left(t_{n+1}x_{n+1} + (1 - t_{n+1}) \sum_{k=1}^{n} \frac{t_k}{1 - t_{n+1}} x_k\right) \leq (1 - t_{n+1})f\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{t_k}{1 - t_{n+1}} x_k\right) + t_{n+1}f(x_{n+1})$$

Or par construction, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{t_k}{1 - t_{n+1}} = \frac{1}{1 - t_{n+1}} \sum_{k=1}^{n} t_k = \frac{1}{1 - t_{n+1}}(1 - t_{n+1}) = 1$$

Nous avons donc une famille de n points de l'intervalle I affectés de coefficients positifs dont la somme est égale à 1.
On a donc d'après l'hypothèse de récurrence :

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{t_k}{1 - t_{n+1}} x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{t_k}{1 - t_{n+1}} f(x_k)$$

Donc

$$(1 - t_{n+1})f\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{t_k}{1 - t_{n+1}} x_k\right) + t_{n+1}f(x_{n+1}) \leq (1 - t_{n+1}) \sum_{k=1}^{n} \frac{t_k}{1 - t_{n+1}} f(x_k) + t_{n+1}f(x_{n+1})$$

Et donc après simplification
$$f(t_1x_1 + \cdots + t_nx_n + t_{n+1}x_{n+1}) \leq t_1f(x_1) + \cdots + t_nf(x_n) + t_{n+1}f(x_{n+1})$$
Il y a hérédité et le théorème est donc démontré.

4.2) Fonctions convexes dérivables

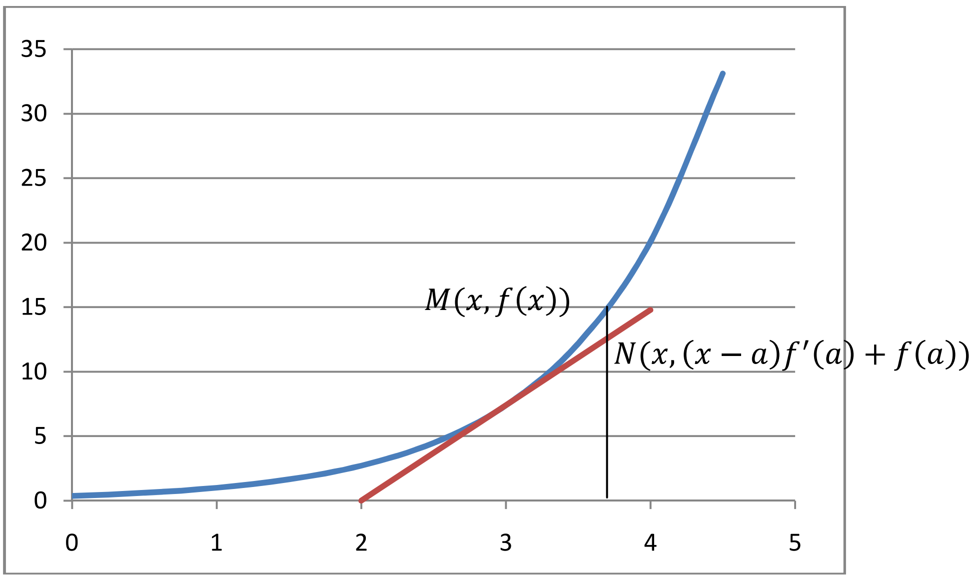
On démontre (mais le théorème n'est pas au programme) que toute fonction convexe sur un intervalle est continue sur cet intervalle et admet des dérivées à droites et à gauche en tout point de cet intervalle.
Dans le cas où la fonction est dérivable sur I, nous avons le théorème suivant (admis)

THEOREME

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I

f est convexe sur I si et seulement si sa fonction dérivée f' est une fonction croissante sur I.

Interprétation géométrique
Soit f une fonction dérivable et convexe sur un intervalle I.
Soit a un élément quelconque de I.
Pour tout $x \in I$, on pose
$$g_a(x) = f(x) - (x-a)f'(a) - f(a)$$
On a
$$g'(x) = f'(x) - f'(a)$$
La fonction f' étant croissante sur I, pour tout $x \geq a$, on a $g'(x) \geq 0$ et pour tout $x \leq a$, on a $g'(x) \leq 0$.
La fonction g est donc décroissante sur $I \cap]-\infty, a]$ et croissante sur $I \cap [a, +\infty[$.
Elle admet donc un minimum en a. On a
$$g(a) = f(a) - (a-a)f'(a) - f(a) = 0$$
Donc
$$\forall x \in I, g_a(x) \geq 0$$
Et donc
$$\forall x \in I, f(x) \geq (x-a)f'(a) + f(a)$$
Ce qui signifie que tout point de la courbe d'abscisse x est au-dessus de tout point de même abscisse sur n'importe quelle tangente, ou autrement dit que la courbe est au-dessus de n'importe quelle tangente.
La courbe est au-dessus de toutes les tangentes
Graphiquement, on aura par exemple.



Par exemple la fonction $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est $x \mapsto e^x$, fonction croissante sur $\mathbb{R}$.
Donc $\forall a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}$,

$$e^a(x-a) + e^a \leq e^x$$

Un cas intéressant est $a = 0$, on a alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, x + 1 \leq e^x$$

Fonction concave
On a un théorème équivalent (et une situation géométrique de même nature, mais inversée) pour une fonction concave :

THEOREME

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I
f est concave sur I si et seulement si sa fonction dérivée f' est une fonction décroissante sur I

Ce qui correspond géométriquement à la situation suivante :
la fonction f dérivable est concave sur I si et seulement si son graphe est au dessous de toute tangente.

Prenons le cas de la fonction ln.
On a $\left(\ln(x)\right)' = \dfrac{1}{x}$, fonction décroissante sur $]0,+\infty[$. Donc $\forall a > 0, \forall x > 0$

$$\frac{1}{a}(x-a) + \ln(a) \geq \ln(x)$$

Pour $a = 1$

$$x - 1 \geq \ln(x)$$

4-3) Fonctions deux fois dérivables et convexité

C'est l'un des critères les plus utilisés.

THEOREME

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I
f est convexe sur I si et seulement si sa dérivée seconde f'' est positive sur I
f est concave sur I si et seulement si sa dérivée seconde f'' est négative sur I

Il est évident qu'il est équivalent sous les conditions énoncés à une dérivée première croissante ou décroissante ce qui caractérise les fonctions convexes ou concaves.

4-4) Points d'inflexion pour une fonction

DEFINITION

Soit une fonction f définie sur un intervalle $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$.
On dit qu'un point de coordonnées $(c, f(c))$ avec $c \in]a,b[$ est un point d'inflexion si la fonction f' admet un extremum local en c.
Si la fonction f est deux fois dérivable sur $]a,b[$, alors on a un point d'inflexion au point d'abscisse c si f'' s'annule en c en changeant de signe.

Dans le cas d'une fonction deux fois dérivables (qui est celui que nous rencontrerons le plus souvent) si le point $(c, f(c))$ est un point d'inflexion, cela signifie que $f''(c) = 0$.

Comme la dérivée seconde change de signe en c : la courbe change donc **de concavité : elle passe de convexe à concave ou de concave à convexe.**
La tangente en c est donc d'un côté de la courbe avant c (côté qui correspond à la concavité dans cette partie) et de l'autre côté après c. En c, la tangente **traverse** la courbe.